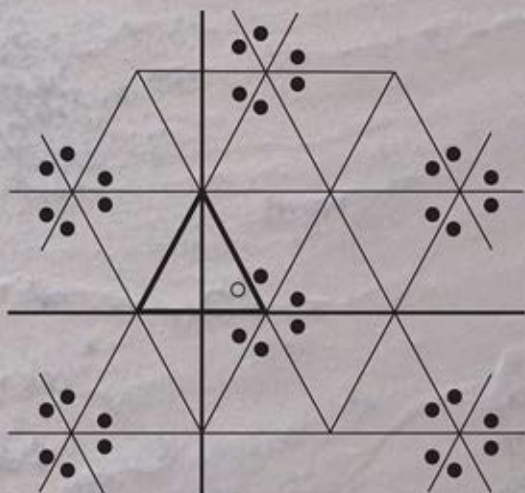


М.А. СУМБАТЯН, А. СКАЛИЯ

**Основы
теории дифракции
с приложениями
в механике и акустике**



М.А. СУМБАТЯН, А. СКАЛИЯ

**Основы
теории дифракции
с приложениями
в механике и акустике**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 534.2
ББК 22.03
С 89



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 13-01-07024,
не подлежит продаже*

Сумбатян М. А., Скалия А. **Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 328 с. — ISBN 978-5-9221-1534-6.

Монография посвящена основам теории дифракции в приложении к задачам механики и акустики. Приведены необходимые сведения из математического анализа и теории волновых процессов. Рассмотрены задачи дифракции в неограниченной среде, на прямолинейных рассеивателях, в слое постоянной толщины. Изложена теория Вейля–Карлемана для собственных частот колебаний ограниченных тел. Описаны методы решения обратных задач идентификации рассеивателя. Показано, что данная теория тесно связана с некорректными задачами, рассмотрению которых посвящена отдельная глава. В заключительной части излагаются численные методы решения нерегулярных задач.

Книга предназначена студентам старших курсов физико-математических и инженерных специальностей, аспирантам и специалистам и предоставляет инструменты для создания собственных полезных методов, как аналитических, так и численных.

ISBN 978-5-9221-1534-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2013

© М. А. Сумбатян, А. Скалия, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Некоторые сведения из анализа и теории волновых процессов	10
1.1. Преобразование Фурье и аналитические функции	10
1.2. Интегральные уравнения свертки и метод Винера–Хопфа	16
1.3. Суммирование расходящихся рядов и интегралов	21
Суммирование методом Пуассона–Абеля (22).	
1.4. Асимптотические оценки интегралов	26
1.5. Теория Фредгольма для интегральных уравнений второго рода . . .	37
1.6. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода	41
1.7. Сингулярные интегральные уравнения типа Коши	48
1.8. Гиперсингулярные интегралы и интегральные уравнения	56
1.9. Основные уравнения волновой механики и акустики	61
1.9.1. Линейная гидроакустика (61). 1.9.2. Электромагнитная волновая теория (64). 1.9.3. Линейная динамическая теория упругости (64).	
Глава 2. Теория дифракции для препятствий в неограниченной среде	68
2.1. Свойства потенциалов простого и двойного слоя	68
2.1.1. Трехмерный случай (68). 2.1.2. Двумерный случай (69).	
2.2. Основное интегральное уравнение теории дифракции	77
Постановка задачи дифракции (81).	
2.3. Свойства интегрального оператора теории дифракции	84
2.3.1. Задача дифракции для низких частот (85). 2.3.2. Пример. Низкочастотная дифракция на твердом круглом диске (85). 2.3.3. Произвольное трехмерное препятствие. Акустически твердая граница (87).	
2.4. Низкочастотное решение для сферического отражателя	89
2.4.1. Акустически твердое препятствие (89). 2.4.2. Акустически мягкое препятствие (92).	

2.5. Диаграмма рассеяния для канонических форм	93
2.5.1. Низкочастотное рассеяние на твердом круглом диске (94).	
2.5.2. Низкочастотная диаграмма для акустически твердой сферы (95).	
2.5.3. Рассеяние на акустически мягкой сфере (97).	
2.6. Асимптотический характер теории дифракции Кирхгофа	98
Пример. Высокочастотная диаграмма рассеяния на круглом диске (102).	
Глава 3. Волновые поля в слое постоянной толщины.	105
3.1. Волновой оператор в акустическом слое.	105
3.2. Принципы выбора единственного решения	109
3.2.1. Условие излучения Зоммерфельда (109).	
3.2.2. Принцип предельного поглощения (принцип Игнатовского) (111).	
3.2.3. Энергетическое условие излучения (принцип Мандельштама) (112).	
3.2.4. Принцип предельно большого времени (принцип Тихонова–Самарского) (113).	
3.3. Волны в упругом слое	117
3.4. Суммирование некоторых осциллирующих рядов.	123
3.5. Эффективное вычисление волновых полей в слое постоянной толщины.	128
Глава 4. Аналитические методы для ограниченных областей	133
4.1. Спектральные свойства внутренней задачи для лапласиана.	133
4.2. Явные формулы для собственных частот круглого диска	141
4.3. Вариационные принципы для собственных значений	146
4.4. Теория Вейля–Карлемана распределения собственных значений.	152
Области, содержащие конечное число подобластей (154). Области произвольной формы (155).	
4.5. Явные результаты для некоторых многоугольников	156
4.5.1. Основы метода мнимых источников (157).	
4.5.2. Альтернативное представление для прямоугольной области (158).	
4.5.3. Обобщение на более сложные многоугольники (160).	
4.5.4. Оценка для собственных частот (162).	
4.6. Явные результаты для некоторых многогранников.	165
4.6.1. Быстро сходящееся представление для функции S (166).	
4.6.2. Точное решение для треугольной призмы (169).	
4.6.3. Явные формулы для собственных частот (171).	
Глава 5. Дифракция на прямолинейных препятствиях.	173
5.1. Дифракция на экране и на щели в экране	173
Свойства интегральных уравнений (176).	
5.2. Дифракция на трещине в неограниченной упругой среде	180
Свойства интегрального уравнения (182).	
5.3. Высокочастотная асимптотика в неограниченной среде.	186

5.4. Прямолинейный вибратор в бесконечном волноводе	191
Эффективное высокочастотное представление для $G_+(\alpha)$ (196).	
5.5. Волны в упругом полупространстве. Функция Рэлея	199
5.6. Динамическая контактная задача для упругого слоя	203
Глава 6. Методы коротковолновой асимптотики	208
6.1. Метод Шоха для трехмерных волновых полей	208
6.2. Высокочастотные волновые поля в упругом полупространстве	213
6.3. Асимптотическая природа геометрической теории дифракции	217
6.4. Высокочастотная дифракция с переотражениями	221
6.5. Примеры высокочастотного многократного отражения	229
6.5.1. Симметричное отражение от полукруга (229). 6.5.2. Случай неизолированной стационарной точки (231).	
6.6. Физическая теория дифракции для невыпуклых отражателей	234
6.7. Высокочастотная трехмерная теория дифракции	237
Глава 7. Обратные задачи коротковолновой дифракции	242
7.1. Основы дифференциальной геометрии выпуклых поверхностей . . .	242
7.2. Сведение обратной задачи дифракции к задаче Минковского	247
7.3. Точные явные результаты для двумерной обратной задачи	250
7.4. Точное явное решение в случае осевой симметрии.	252
7.5. Реконструкция невыпуклых препятствий в двумерном случае	255
Глава 8. Обратные задачи дифракции для произвольной границы	262
8.1. Некорректные задачи для уравнений первого рода	262
8.2. Регуляризация с помощью сглаживающего функционала	266
8.3. Итерационные методы для уравнений первого рода	271
8.4. Сравнение методов реконструкции геометрии рассеивателя	276
8.5. Комбинация итераций и сглаживания	281
8.6. Метод глобального случайного поиска в обратных задачах	290
Глава 9. Численные методы для нерегулярных операторных уравнений	293
9.1. Метод наискорейшего спуска	293
9.2. Метод Галеркина для слабосингулярных уравнений первого рода . .	298
9.3. Физическая теория дифракции для невыпуклых отражателей	304
9.4. Численные методы для интегральных уравнений с ядром Коши . . .	310
9.5. Численные методы для гиперсингулярных уравнений	315
Список литературы	321

Предисловие

По-видимому, один из самых интересных и обсуждаемых вопросов современной математической физики — это взаимосвязь эвристических и формальных методов. Каждому из этих двух различных подходов свойственны свои существенные достоинства и ограничения. Более того, немалое количество открытий в науке было сделано благодаря комбинации строгого и эвристического методов исследования.

Ярким примером такого рода комбинации может служить теория дифракции, в которой объединение двух подходов привело к весьма эффективным и впечатляющим результатам. Многие важные и интересные решения, а также некоторые классические теории возникли из эвристических идей. Наиболее впечатляющий пример — физическая теория дифракции Кирхгофа, основанная на ясной концепции «света и тени». Впоследствии многие эвристические результаты были строго обоснованы и доказаны на уровне теорем. С другой стороны, неудачные попытки доказать некоторые эвристические идеи стимулировали значительный прогресс в разработке формальных методов, которые позволили получить корректные решения, порой отличные от предсказанных на основе интуиции.

Указанная взаимосвязь повлияла и на стиль изложения настоящей книги. Во многих разделах рассматриваются эвристические идеи, которые, как правило, обосновываются (или опровергаются) с использованием строгих математических методов. Вследствие ограниченного объема книги мы приводим в некоторых случаях лишь краткий набросок обоснования, отсылая читателя к оригинальной литературе для более детального изучения.

Другая особенность излагаемого материала состоит в том, что он связан с быстрым прогрессом вычислительных методов за последние 30 лет, который значительно изменил привычную точку зрения об эффективных методах исследования. Еще совсем недавно разложение неизвестной функции в ряды по специальным функциям, позволяющее свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, рассматривалось как стандартный метод решения. Подобный «полуаналитический» подход был эффективен 20–30 лет назад, когда оценка регулярности полученных бесконечных систем считалась очень важной, так как она гарантировала достижение требуемой точности решения при сохранении лишь нескольких уравнений. Это было важно для компьютеров первых поколений. Сегодня, когда не существует особой разницы между системами 10×10 и 500×500 (уравнений и переменных) даже для домашних компьютеров, подобная точка зре-

ния выглядит архаичной, так как время, требуемое для приведения системы к подходящей форме для «быстрых» вычислений, намного больше времени, необходимого для «медленных» вычислений, основанных на современных прямых численных алгоритмах, таких как метод граничных элементов и метод конечных элементов. Видимо, стоит согласиться с тем, что в случаях, где прямые численные методы дают надежные результаты за приемлемое компьютерное время, они могут рассматриваться как наиболее эффективные для исследуемого класса задач. Очень важно выделить случаи, где априори можно отказаться от прямых численных методов. К таковым можно отнести следующие.

1. Задачи, где могут быть получены точные аналитические решения или их хорошая аппроксимация. Теория дифракции дает много примеров подобного рода задач.

2. Изучение динамических процессов на высоких частотах, когда необходимо брать как минимум 10 узлов на длину волны для получения приемлемых результатов каким-либо прямым численным методом. При уменьшении длины волны (т.е. при росте частоты) в рамках данного частотного диапазона полное число узлов возрастает очень быстро, что приводит к слишком большим алгебраическим системам. Ярким примером может служить акустика помещений. Предположим, что звуковая волна частотой $f = 2$ кГц, длина которой в воздухе равна примерно 17 см, распространяется в комнате длиной 17 м. Следовательно, для разумной численной точности необходимо взять как минимум 1000 узлов вдоль длины комнаты. Если комната имеет ширину 8 м и высоту 5,1 м, следует рассматривать $1000 \times 500 \times 300 \approx 10^8$ конечно-элементных узлов и применять арифметику комплексных чисел. Помимо этого необходимо также учитывать зависимость от времени в нестационарных процессах. Реализация подобных вычислений проблематична даже на современных мощных супер-компьютерах. Здесь разумным критерием приемлемости численного подхода является его реализация на ПК или похожем компьютере. Таким образом, получение решений подобных «высокочастотных» задач в точной формулировке прямыми численными методами кажется неосуществимым в ближайшем будущем.

3. Изучение феномена сложной качественной природы. Так как прямые численные методы приводят лишь к наборам чисел, которые обычно сводятся в таблицы или графики, очень часто проблематично выделить сложные качественные эффекты из числовых таблиц и графиков. Вместо этого предпочтительнее построить приближенное аналитическое решение, из которого качественные эффекты могут быть выделены в явном виде.

4. Случаи, когда точное аналитическое решение получено, но его представление неприменимо на практике для конкретных вычислений. Пример подобного рода рассматривается в разделе 6.1. В таких интересных случаях следует искать альтернативный подход, который часто

сводится к построению некоторого приближенного решения, более подходящего для быстрых вычислений, нежели точное аналитическое решение.

Указанные случаи не распространены широко, однако, когда они встречаются, для них сложно найти эффективный метод, особенно начинающему исследователю. Это побудило нас завершать каждый раздел специальными примечаниями, которые должны помочь читателю построить свое собственное менее формальное понимание и создать более полную картину в рассматриваемом вопросе.

Заметим, что применение численных методов в регулярных случаях подробно описано в классической литературе. По этой причине мы рассматриваем численные методы в нерегулярных случаях лишь для некоторых задач (см. главу 9).

В итоге основная цель книги — показать тесную взаимосвязь эвристических и строгих методов в современной теории дифракции. Такой подход оправдывается выбором наших потенциальных читателей. Книга представляет ясные и элегантные методы и предназначена студентам старших курсов и аспирантам, желающим изучить современное состояние в рассматриваемой области исследований. В то же время мы надеемся, что более опытные специалисты сумеют убедиться, что время явных точных решений в сложных задачах еще не прошло — это демонстрируется оригинальными результатами авторов в разделах 4.5, 4.6, 5.4–5.6, и 6.3–6.6, так же как и во многих разделах глав 7–9. Более того, мы надеемся, что опытный читатель получит инструмент для создания собственных полезных методов — как аналитических, так и численных.

Читатель увидит, что мы предпочитаем опираться на классические результаты основателей современной науки, не отталкиваясь от широко распространенной точки зрения о том, что лишь очень сложные «абстрактные» теории могут обеспечить дальнейший прогресс в современной науке. Мы настоятельно рекомендуем читателю оперировать классическими теориями, и настоящая книга демонстрирует, что продуктивные идеи Гильберта, Коши, Фурье, Абеля, Пуассона, Вейля, Римана, Грина, Кирхгофа, Релея, Гельмгольца, Неймана и других остаются актуальными в современных задачах дифракционной теории. Следует также подчеркнуть, что мы пытаемся избежать слишком формального изложения.

Вследствие ограниченного объема ни одна монография не в состоянии затронуть все важные вопросы, и настоящая книга не исключение. Например, читатель не найдет здесь задач с нестационарными режимами. Исследование касается лишь граничных эллиптических задач, и только с постоянными коэффициентами. Более того, основное внимание сосредоточено на методах, которые дают решения без слишком громоздких математических преобразований. Например, читатель не найдет структуру волнового поля в зоне «полутени» в дифракции на выпуклых препятствиях, а в методе «краевых волн» в дифракции на

прямолинейных рассеивателях читатель найдет только главный высокочастотный асимптотический член, который строится при помощи простой и элегантной техники.

Книга предназначена для читателей, знакомых с основами механики, математического анализа функций вещественных и комплексных переменных, а также с функциональным анализом в рамках стандартных университетских курсов математических, физических или инженерных факультетов.

М. А. Сумбатян, А. Скалия

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Преобразование Фурье и аналитические функции

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на действительной оси: $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда ее преобразование Фурье $F(s)$ определяется как

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx, \quad F(s) \in L_1(-\infty, \infty), \quad (1.1)$$

и, в случае когда функция $f(x)$ непрерывна, справедлива следующая формула обратного преобразования:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a F(s) e^{-isx} ds, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (1.2)$$

Функцию $f(x)$ назовем **оригиналом**, а функцию $F(s)$ — ее **образом**. Тот факт, что оригинал и образ связаны соотношениями (1.1) и (1.2), будем обозначать формулой $f(x) \Rightarrow F(s)$.

Основные свойства преобразования Фурье хорошо известны [71, 126]. Мы воспользуемся лишь двумя из них.

1. Образ Фурье от производной. Пусть $f(x) \Rightarrow F(s)$ и $f^{(n)}(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, тогда

$$f^{(n)}(x) \Rightarrow (-is)^n F(s). \quad (1.3)$$

2. Образ Фурье свертки. Пусть $f(x), g(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и $f(x) \Rightarrow F(s), g(x) \Rightarrow G(s)$, тогда свертка $f(x)$ и $g(x)$ определяется как

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \in L_1(-\infty, \infty), \quad (1.4)$$

$$h(x) \Rightarrow F(s)G(s).$$

Первое свойство (1.3) может быть получено путем прямого дифференцирования формулы (1.2), а второе (1.4) получается заменой переменной при применении преобразования Фурье к первому соотношению в (1.4).

Преобразование Фурье также может быть определено для функций из гильбертова пространства L_2 : $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Классическое равенство Планшереля подтверждает существование преобразования Фурье $F(s)$ [132]:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} ds = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a F(s) e^{isx} ds, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.5)$$

где сходимость подразумевается в среднеквадратичном смысле, т.е. как сходимость в L_2 . В этом случае $F(s) \in L_2(-\infty, \infty)$ и обратное преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a F(s) e^{-isx} ds, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.6)$$

справедливо в том же смысле среднеквадратичной сходимости. Для функций из L_2 : $f(x), g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ тождество Парсеваля гласит, что если $f(x) \Rightarrow F(s)$ и $g(x) \Rightarrow G(s)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \bar{G}(s) ds, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds, \quad (1.7)$$

где черта над символом означает комплексное сопряжение. Теорема о свертке также остается справедливой в L_2 .

Пусть $H(D)$ определяет множество комплекснозначных аналитических функций $f(z)$ комплексной переменной $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$, определенной в области D : $f(z) \in H(D)$, $z \in D$. Напомним, что из этого вытекает аналитичность и однозначность функции $f(z)$ вместе со всеми ее производными: $f^{(n)}(z) \in H(D) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$ [33]. Тогда теорема Коши утверждает, что значение контурного интеграла

$$I(\Gamma) = \int_{z_A}^{z_B} f(z) dz, \quad z_A, z_B \in D, \quad (1.8)$$

одно и то же вдоль любого контура $\Gamma \subset D$ конечной длины, если концевые точки z_A, z_B одни и те же для всех Γ вне зависимости от того, как Γ соединяет z_A и z_B . Это эквивалентно утверждению, что для любого замкнутого контура $\Gamma \subset D$ конечной длины $I(\Gamma) = 0$.

Из предыдущих рассуждений ясно, что $I(\Gamma)$ в уравнении (1.8) зависит от контура только в случае, когда $f(z)$ имеет сингулярные точки в D . В этой книге из всего множества особых точек мы будем рассматривать только полюсы и точки ветвления.

Точка $z_0 \in D$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда z_0 — нуль функции $g(z) = 1/f(z)$, т.е. $g(z_0) = 0$. Кратность n

нуля z_0 функции $g(z)$ является в то же время и кратностью полюса z_0 для функции $f(z)$. Легко доказать, что главный член ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 — это $(z - z_0)^{-n}$, т. е.

$$f(z) = \sum_{m=-n}^{\infty} a_m (z - z_0)^m, \quad (1.9)$$

где коэффициент a_{-1} называется *вычетом* функции в полюсе z_0 и обозначается как $a_{-1} = \text{Res}[f(z), z_0]$. Если в уравнении (1.9) $n = 1$, то a_{-1} есть старший коэффициент в разложении Лорана, и такой полюс функции называется **простым полюсом**. Существует достаточно легкий способ подсчета вычета в простом полюсе z_0 (штрих — знак производной):

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}, \quad \text{если } f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}, \quad (1.10)$$

который весьма эффективен с любым естественным дробным представлением (как в случае $\text{tg } z = \sin z / \cos z$).

Вычеты в полюсах играют ключевую роль в вычислении интегралов в комплексной плоскости. Данный факт представляется *интегральной формулой Коши*, справедливой для любого замкнутого контура $\Gamma \subset D$, взятого против часовой стрелки:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_m \text{Res}[f(z), z_m], \quad (1.11)$$

где вычеты берутся во всех полюсах z_m (произвольной кратности) внутри Γ .

Эта формула очень полезна для вычисления интегралов типа (1.8). Достаточно часто $I(\Gamma)$ в (1.8) может быть легко вычислен для некоторого простого контура $I(\Gamma_s)$, проходящего через конечные точки z_A, z_B . Тогда разница между $I(\Gamma)$ и $I(\Gamma_s)$ равна сумме вычетов в полюсах, расположенных между контурами Γ и Γ_s , взятой с соответствующим знаком.

Эта стратегия также может быть применена для интегралов, записанных вдоль бесконечной линии. В частности, пусть $f(z)$ в преобразовании Фурье (1.1) является аналитической в полосе конечной ширины $|\text{Im}(z)| \leq \delta$. Тогда контур интегрирования $\Gamma = (-\infty, \infty)$ может быть произвольно перенесен вверх или вниз внутри данной полосы. Действительно, если интеграл (1.1) конечен при интегрировании вдоль исходного контура $(-\infty, \infty)$, это предполагает, что $f(z) \rightarrow 0, \text{Re}(z) \rightarrow \infty$. Таким образом, интеграл от этой подынтегральной функции (1.1) вдоль любого замкнутого контура $(-\infty, \infty) \cup (\infty, \infty + i\varepsilon) \cup (\infty + i\varepsilon, -\infty + i\varepsilon) \cup (-\infty + i\varepsilon, -\infty)$, $|\varepsilon| < \delta$, равен нулю. Поскольку два интеграла вдоль удаленных конечных вертикальных отрезков обращаются в нуль, так как $f(z)$ убывает в дальнейшей зоне, то это доказывает наше простое утверждение. В случае когда между действительной осью и параллель-

ной ей линией $\text{Im}(z) = \varepsilon$ существует несколько полюсов, очевидно, что такой же перенос контура возможен, если мы добавим вычеты в этих полюсах. Иногда данный способ позволяет вычислить преобразование Фурье в явном виде.

Для того чтобы сдвинуть контур интегрирования Γ выше (или ниже), вне полосы конечной ширины, необходимо применить следующую лемму.

Лемма (Жордана). Пусть

$$I_R = \int_{C_R} f(z) e^{isz} dz, \quad (1.12)$$

где функция $f(z)$ — аналитическая всюду в верхней полуплоскости $\text{Im}(z) \geq 0$, за исключением, возможно, конечного числа полюсов; $\text{Re}(s) > 0$; $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, равномерно на $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ и C_R — верхний полукруг радиуса R : $|z| = R$, $\text{Im}(z) \geq 0$. Тогда $I_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Доказательство данной леммы несложно и может быть найдено в классической литературе.

Вывод. При тех же условиях преобразование Фурье $F(s)$ в соотношении (1.1) может быть явно выражено в виде

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_m) > 0} \text{Res}[f(z), z_m] e^{isz_m}. \quad (1.13)$$

Последний результат следует из интегральной формулы Коши (1.11), если ее применить к функции $f(z) \exp(isz)$ вдоль контура $\Gamma = (-R, R) \cup C_R$, $R \rightarrow \infty$.

Лемма (обобщенная лемма Жордана). Пусть функция $f(z)$ обладает счетным набором полюсов z_m , $m = 1, 2, \dots$, $\text{Im}(z_m) > 0$, $z_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$; $f(z)$ равномерно стремится к нулю на полукруге C_{R_m} радиуса R_m , где $R_m \rightarrow \infty$, и каждый C_{R_m} проходит где-то между z_m и z_{m+1} . Тогда для всех s таких, что $\text{Re}(s) > 0$, имеем

$$I_{R_m} = \int_{C_{R_m}} f(z) e^{isz} dz \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Доказательство этого менее известного результата повторяет доказательство классической леммы Жордана.

Вывод. При тех же условиях преобразование Фурье может быть явно выражено в виде бесконечного ряда

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \text{Res}[f(z), z_m] e^{isz_m}. \quad (1.15)$$

Последний результат довольно полезен, когда функция $f(z)$ мероморфна, т.е. является отношением двух целых функций $f(z) = h(z)/g(z)$. Напомним, что *целые* функции определяются как аналитические на всей комплексной плоскости. Таким образом, счетный набор нулей и полюсов любой мероморфной функции $f(z)$ определяется нулями целых функций $h(z)$ и $g(z)$, и оба получающихся множества конечны тогда и только тогда, когда $f(z)$ рациональна.

Это ясно демонстрируется на примере функции $f(z) = \text{th}(z)/z$, где $h(z) = \text{sh}(z)/z$ и $g(z) = \text{ch}(z)$. Очевидно, что в данном примере множество верхних полуокружностей C_{R_m} , $m = 1, 2, \dots$, может быть определено из условия $\text{th}(iR_m) = 0 \sim \text{tg}(R_m) = 0 \sim R_m = \pi m$, что предопределяет прохождение соответствующих полуокружностей через мнимые точки $iR_m = \pi m i$ (рис. 1.1).

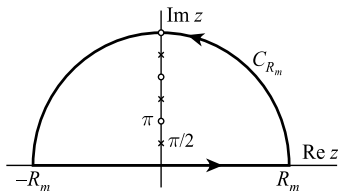


Рис. 1.1. Чередующиеся полюсы и нули мероморфной функции

Ниже в задачах дифракции мы будем часто встречать функции комплексной переменной, которые имеют точки ветвления и, следовательно, неоднозначны. Типичный пример подобной функции — квадратный корень

$$\gamma(z) = \sqrt{z^2 - k^2} \quad (1.16)$$

с соответствующим положительным параметром $k > 0$ [105]. Обычно для работы с однозначной функцией следует провести разрезы, которые становятся границами между различными ветвями. Для квадратного корня (1.16) существуют две точки ветвления: $z = k$ и $z = -k$, и вполне естественно провести разрез, который позволит оперировать с арифметическим значением разности, стоящей под знаком квадратного корня, т.е. ветвь с $\text{Re}(z) \geq 0$. Это может быть обеспечено разрезами, изображенными на рис. 1.2, один из которых проходит полностью в верхней полуплоскости $\text{Im}(z) > 0$, а другой — в нижней полуплоскости $\text{Im}(z) < 0$. Отметим, что для вещественных z $\gamma(z) = \sqrt{z^2 - k^2} \geq 0$ при $|z| \geq k$ и $\gamma(z) = -i\sqrt{k^2 - z^2}$ при $|z| \leq k$.

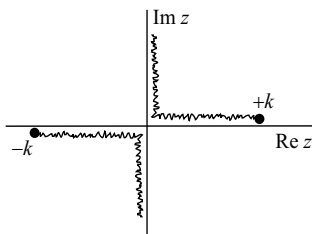


Рис. 1.2. Сечения в комплексной плоскости z , которые делают функцию $\gamma(z)$ однозначной

Например, с подобными разрезами интегральное представление функции Ханкеля [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ixs)}{\gamma(s)} ds = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(xs)}{\gamma(s)} ds = \pi i H_0^{(1)}(k|x|) \quad (1.17)$$

подразумевает интегрирование по вещественной оси, при этом путь интегрирования лежит между двумя разрезами. Заметим, что корневые особенности в точках $s = \pm k$ интегрируемы в классическом смысле.

Следует отметить, что ветвящиеся функции, такие как (1.16), как правило, не являются аналитическими. Тем не менее некоторые сочетания таких функций могут порождать аналитические и даже целые функции, как видно из примера функции $\sin[b\gamma(z)]/\gamma(z)$ (где b — константа). Данная функция безусловно целая, поскольку она может быть представлена рядом Тейлора

$$\frac{\sin[b\gamma(z)]}{\gamma(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z^2 - k^2)^m b^{2m+1}}{(2m+1)!} (-1)^m, \quad (1.18)$$

который является аналитическим и сходящимся для всех конечных z .

Примечания

1. Интересно, что довольно часто «кратчайший путь» между двумя вещественными точками «лежит» в комплексной плоскости. Для иллюстрации рассмотрим интеграл по вещественной оси от вещественной функции

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + b^2} dx \quad (a \geq 0, \quad b > 0). \quad (1.19)$$

С помощью леммы Жордана получаем

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2} dx = \pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}, ib \right] = \pi i \frac{e^{-ab}}{2bi} = \frac{\pi}{2b} e^{-ab} \quad (1.20)$$

где вычет в простом полюсе $z = ib$ вычислен по методу, описанному выше.

2. Аналогичный подход применим к мероморфным функциям, если использовать обобщенную лемму Жордана ($a, b > 0$):

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(bx)}{x} \cos(ax) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \frac{\operatorname{sh}(bx)}{x \operatorname{ch}(bx)} dx = \\ &= \pi i \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left[e^{iaz} \frac{\operatorname{sh}(bz)}{z \operatorname{ch}(bz)}, \frac{\pi i}{b} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] = \pi i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi a(m-1/2)/b}}{\pi(m-1/2)i} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi a(m-1/2)/b}}{m-1/2} = \ln \frac{1+e^{-\pi a/2b}}{1-e^{-\pi a/2b}} = \ln \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\pi a}{4b} \right) \right], \quad (1.21) \end{aligned}$$

где для вычисления вычетов в простых полюсах в представлении $f(z) = h(z)/g(z)$ были выбраны целые функции $h(z) = e^{iaz} \operatorname{sh}(bz)/z$ и $g(z) = \operatorname{ch}(bz)$. Также был принят во внимание табличный ряд [20]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1). \quad (1.22)$$

3. Еще одно удивительное явление связано с вопросом, почему преобразование Фурье, которое (как правило) преобразует действительные функции в комплекснозначные, столь полезно в случае решения вещественных краевых задач. Ответ на этот вопрос может быть получен, если мы обратим внимание на свойство 1 преобразования Фурье, так как любая производная неизвестной функции преобразуется в аналогичный образ с коэффициентом, содержащим параметр Фурье s . Следовательно, если решается краевая задача в области, где декартова координата x изменяется от $-\infty$ до ∞ , то применение преобразования Фурье позволяет понизить размерность задачи на единицу. Это позволяет преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение в алгебраическое, а дифференциальное уравнение в частных производных по двум переменным в обыкновенное дифференциальное уравнение.

Заметим также, что свойство 2 преобразования Фурье позволяет решать интегральные уравнения с ядрами свертки в явном виде. Обе отмеченные особенности будут подробнее рассмотрены ниже.

1.2. Интегральные уравнения свертки и метод Винера–Хопфа

В общем случае интегральное уравнение свертки имеет следующий вид:

$$\alpha \varphi(x) + \int_a^b K(x-\xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad a < x < b. \quad (1.23)$$

Очевидно, что это уравнение второго рода. В случае когда $\alpha = 0$, уравнение (1.23) становится уравнением первого рода. Функция $K(x)$ — это (известное) ядро уравнения, и $f(x)$ — его (известная) правая часть. Функция $\varphi(x)$ неизвестна и должна быть определена из уравнения (1.23). Существует особый, единственный случай, когда уравнение (1.23) в самом общем виде допускает точное аналитическое решение. Это случай, когда $b = \infty$ и возникает уравнение Винера–Хопфа. Здесь a может быть легко сделано равным нулю путем линейной замены переменных, и для дальнейшего изложения нам будет важен лишь случай уравнения первого рода ($\alpha = 0$). Решение данного уравнения базируется на следующих известных свойствах преобразования Фурье в комплексной плоскости [71, 105, 107].

1. Если $|f(x)| \leq A e^{\tau_- x}$, $x \rightarrow +\infty$, то функция

$$F_+(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{isx} dx \quad (1.24)$$

является аналитической в верхней полуплоскости $\text{Im}(s) > \tau_-$.

2. Если $|f(x)| \leq B e^{\tau_+ x}$, $x \rightarrow -\infty$, то функция

$$F_-(s) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{isx} dx \quad (1.25)$$

является аналитической в нижней полуплоскости $\text{Im}(s) < \tau_+$.

3. Если оба свойства 1 и 2 выполняются и $\tau_+ > \tau_-$, то полное преобразование Фурье

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx \quad (1.26)$$

является аналитическим в полосе $\tau_- < \text{Im}(s) < \tau_+$, а обратное преобразование Фурье может быть вычислено следующим образом

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} F(s) e^{-isx} ds, \quad \tau_- < \tau < \tau_+. \quad (1.27)$$

Из предыдущего раздела ясно, что при необходимости бесконечный контур интегрирования Γ в формуле (1.27) можно произвольным образом деформировать внутри данной полосы.

Теперь мы готовы применить метод Винера–Хопфа к уравнению

$$\int_0^{\infty} K(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad 0 < x < \infty. \quad (1.28)$$

Выражение (1.28) эквивалентно

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \varphi_+(\xi) d\xi = f_+(x) + f_-(x), \quad |x| < \infty, \quad (1.29)$$

где

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

и $f_-(x)$ — некоторая дополнительная неизвестная функция. Выражение (1.29) содержит две неизвестные функции, $\varphi_+(x)$ и $f_-(x)$, тем не менее, как мы скоро увидим, обе функции могут быть определены из одного данного этого уравнения. При этом мы предполагаем, что функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ удовлетворяют условиям 1 и 2 соответственно, а функция $K(x)$ — условию 3 с $\tau_+ > \tau_-$. Тогда, применяя преобразование Фурье к уравнению (1.29) и используя теорему свертки (см. предыдущий раздел), приходим к следующему соотношению:

$$L(s) \Phi_+(s) = F_+(s) + F_-(s), \quad \tau_- < \tau < \tau_+, \quad (1.31)$$

где $L(s)$ — образ Фурье функции $K(x)$.

Ключевой шаг данного метода — так называемая *факторизация* функции $L(s)$, т.е. ее представление в форме $L(s) = L_+(s)L_-(s)$, где функция $L_+(s)$ — аналитическая, без особенностей и без нулей в верхней полуплоскости $\text{Im}(s) > \tau_-$, а $L_-(s)$ обладает такими же свойствами при $\text{Im}(s) < \tau_+$. Тогда выражение (1.31) принимает вид

$$L_+(s) \Phi_+(s) = \frac{F_+(s)}{L_-(s)} + \frac{F_-(s)}{L_-(s)}. \quad (1.32)$$

Следующий шаг — это *разложение*, согласно которому первая дробь в правой части уравнения (1.28) представляется в виде

$$\frac{F_+(s)}{L_-(s)} = N_+(s) + N_-(s), \quad (1.33)$$

что порождает соотношение

$$L_+(s) \Phi_+(s) - N_+(s) = N_-(s) + \frac{F_-(s)}{L_-(s)}, \quad (1.34)$$

где функция слева является аналитической при $\text{Im}(s) > \tau_-$, а функция справа — аналитической при $\text{Im}(s) < \tau_+$. Так как существует общая полоса аналитичности, тождество (1.34) определяет однозначную целую функцию, которая совпадает с левой частью в верхней полуплоскости и с правой частью в нижней полуплоскости. Обычно можно доказать, что данная целая функция обращается в нуль на бесконечности, тогда

по известному результату из теории целых функций она тождественно равна нулю. Следовательно,

$$L_+(s) \Phi_+(s) - N_+(s) = 0 \sim \Phi_+(s) = \frac{N_+(s)}{L_+(s)}, \quad (1.35)$$

т. е. образ Фурье основной неизвестной функции $\varphi(x)$ определен вместе с самой функцией в явном виде.

Примечания

1. Во многих случаях факторизация и разложение могут быть представлены простым естественным способом. Например, некоторые задачи имеют ядра, преобразование Фурье $L(s)$ которых представимо в виде

$$L(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + d^2}} \frac{P_m(s)}{Q_m(s)}, \quad (1.36)$$

где параметр d положителен, $P_m(s)$ и $Q_m(s)$ — некоторые многочлены одинаковой степени. Такая функция $L(s)$ допускает очевидную факторизацию

$$L(s) = L_+(s) L_-(s), \quad m^+ + m^- = m, \quad (1.37)$$

$$L_+(s) = \frac{1}{\sqrt{d - is}} \frac{a_p \prod_{k=1}^{m^+} (s - s_{p_k}^-)}{a_q \prod_{k=1}^{m^+} (s - s_{q_k}^-)}, \quad L_-(s) = \frac{1}{\sqrt{d + is}} \frac{\prod_{k=1}^{m^-} (s - s_{p_k}^+)}{\prod_{k=1}^{m^-} (s - s_{q_k}^+)}$$

где a_p и a_q — старшие коэффициенты многочленов P_m и Q_m , m^\pm — количество нулей $P_m(s)$ и $Q_m(s)$ с положительной (отрицательной) мнимой частью. На рис. 1.3, где все нули обозначены крестиками,

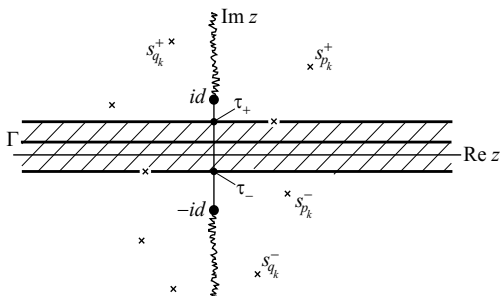


Рис. 1.3. Полоса общей аналитичности для функций «+» и «-»

разрезы для определения однозначных арифметических значений ветвящихся функций показаны зигзагообразными линиями. Нестандартные случаи, когда по крайней мере один нуль вещественный, здесь не рассматриваются. Обозначим

$$\begin{aligned}\tau_- &= \max\{-d, \operatorname{Im}(s_{p_k}^-), \operatorname{Im}(s_{q_k}^-)\}, \\ \tau_+ &= \min\{d, \operatorname{Im}(s_{p_k}^+), \operatorname{Im}(s_{q_k}^+)\}.\end{aligned}\quad (1.38)$$

Тогда функция $L_+(s)$ — аналитическая и не имеет нулей в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(s) > \tau_-$, а функция $L_-(s)$ — аналитическая и не имеет нулей в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}(s) < \tau_+$.

Схожие идеи также применимы и для разложения. Например, если $L(s) = 1/\sqrt{s^2 + d^2}$, $f(x) = e^{-\beta x}$ ($d, \beta > 0$), тогда

$$\begin{aligned}L(s) &= \frac{1}{\sqrt{d-is}} \frac{1}{\sqrt{d+is}} = L_+(s) L_-(s), \\ F_+(s) &= \frac{1}{\beta-is}, \quad \frac{F_+(s)}{L_-(s)} = \frac{\sqrt{d+is}}{\beta-is}.\end{aligned}\quad (1.39)$$

Единственной особой точкой последней функции в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}(s) < d$ является простой полюс $s = -i\beta$ с множителем $h = \sqrt{d+\beta}$. Для того чтобы избавиться от этого полюса, можно вычесть и прибавить величину $h/(\beta-is)$:

$$\frac{F_+(s)}{L_-(s)} = \left(\sqrt{d+is} - \sqrt{d+\beta}\right) \frac{1}{\beta-is} + \frac{\sqrt{d+\beta}}{\beta-is} = N_-(s) + N_+(s).\quad (1.40)$$

Здесь первый член выражения является аналитическим в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}(s) < d$ (так как он больше не содержит простого полюса), второй член, несомненно, является аналитическим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(s) > -\beta$.

После выполнения факторизации и разложения решение уравнения Винера–Хопфа дается выражением (1.35):

$$\Phi_+(s) = \frac{N_+(s)}{L_+(s)} = \frac{\sqrt{d+\beta} \sqrt{d-is}}{\beta-is},\quad (1.41)$$

обратное преобразование которого может быть найдено по таблице обратных преобразований Лапласа [66], так как в нашей задаче преобразование Фурье тесно связано с преобразованием Лапласа:

$$\Phi_+(s) = \int_0^\infty \varphi(x) e^{isx} dx = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-px} dx, \quad p = -is.\quad (1.42)$$

Следовательно, наш образ Фурье в терминах переменной Лапласа p становится

$$\Phi_+(p) = \frac{\sqrt{d+\beta} \sqrt{d+p}}{\beta+p}\quad (1.43)$$

и обращение по Лапласу имеет вид

$$\varphi(x) = \sqrt{d + \beta} \left\{ \frac{e^{-dx}}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{d - \beta} e^{-\beta x} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{(d - \beta)x} \right] \right\} \quad (1.44)$$

где $\operatorname{Erf}(x)$ — интеграл вероятности (функция ошибок).

2. Если ядро слишком сложно для того, чтобы трактовать его в простом виде как в пункте 1, можно применить общие формулы факторизации и разложения. Хороший обзор различных представлений такого рода может быть найден в [105].

Но такой общий подход едва ли пригоден для практических целей. Общие формулы выражаются в терминах некоторых интегралов вдоль бесконечных контуров со слишком сложной подынтегральной функцией, зависящей от переменной s . Далее необходимо подставить эти численно рассчитанные функции в бесконечные интегралы для обратного преобразования Фурье, чтобы получить оригиналы неизвестных величин. Вычисление таких интегралов на компьютере — иногда более сложная задача, чем решение исходного интегрального уравнения свертки. Вместо этого более эффективно применить численные методы напрямую к исходному уравнению. Другая возможность — до решения уравнения применить равномерное приближение к образу ядра в виде определенной функции $L(x)$, которая допускает простую и интуитивно ясную факторизацию.

1.3. Суммирование расходящихся рядов и интегралов

Концепция расходящихся рядов весьма естественна в математической физике. Она также возникает в теории дифракции и во многих других краевых задачах. Достаточно часто (далее мы это увидим для ряда задач) структура решения вблизи некоторых граничных кривых, таких как $y = h$ в примере для слоя постоянной толщины h , обладает следующим поведением:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{a_m(y-h)} m^{\alpha} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (b_m x), \quad (1.45)$$

$$a_m \sim \alpha m, \quad b_m \sim b m, \quad m \rightarrow \infty \quad (a, b > 0).$$

В случае $\alpha \geq 0$ получаются ряды, сходящиеся только внутри полосы $0 < y < h$, и расходящиеся на границе $y = h$. Весьма естественно обращаться с рядом (1.45) так же и на граничной прямой $y = h$, подразумевая, что предел суммы (1.45) при $y \rightarrow h$, если он конечен, может быть положен равным соответствующему граничному значению. Эта идея порождает обширную теорию обобщенного суммирования (см., например, [86, 111]).

Суммирование методом Пуассона–Абе́ля. Если ряд $S = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ расходится в классическом смысле и существует предел $\bar{S}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$ при $x \rightarrow 1-0$, то обобщенное значение (Пуассона–Абе́ля) суммы ряда S равно $S_{PA} = \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x)$.

Из классической формулы Коши–Адамара для радиуса сходимости $R^{-1} = \sup |a_m|^{1/m}$ степенного ряда [46] в случае, когда $|a_m|$ растет не быстрее, чем любая конечная степень m^α , $m \rightarrow \infty$, следует, что $R = 1$. Следовательно, существует определенная возможность того, что обобщенное значение S_{PA} может оказаться конечным.

Ясно, что сумма ряда Пуассона–Абе́ля может быть также определена в альтернативном виде как

$$S_{PA} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\varepsilon m} a_m \quad (x = e^{-\varepsilon}), \quad (1.46)$$

что находится в соответствии с эвристическими идеями, рассмотренными выше.

Схожая техника может быть применена к расходящимся интегралам. Если интеграл

$$S = \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (1.47)$$

расходится на бесконечности, то его обобщенное значение Пуассона–Абе́ля (если таковое существует) определяется как предел

$$S_{PA} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{\infty} e^{-\varepsilon x} f(x) dx. \quad (1.48)$$

Существует несколько альтернативных методов регуляризации для расходящихся рядов и интегралов (например, достаточно известным является метод Чезаро), однако суммирование Пуассона–Абе́ля — наиболее эффективное и общее.

Пример 1. Ряд

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} m \cos(am) \quad (0 < a < 2\pi) \quad (1.49)$$

расходится в классическом смысле, так как его члены неограниченно возрастают при $m \rightarrow \infty$. Техника Пуассона–Абе́ля дает

$$S_1 = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{m=1}^{\infty} x^m m \cos(am) = \operatorname{Re} \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{m=1}^{\infty} m x^m e^{iam} =$$

$$= \operatorname{Re} \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{m=1}^{\infty} m (xe^{ia})^m = \operatorname{Re} \frac{e^{ia}}{(1 - e^{ia})^2} = -\frac{1}{4 \sin^2(a/2)}. \quad (1.50)$$

Пример 2. Интеграл

$$S_2 = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cos(ax) dx \quad (a > 0) \quad (1.51)$$

расходится на бесконечности. Его обобщенное значение Пуассона–Абеля

$$\begin{aligned} S_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} \sqrt{x} \cos(ax) dx = \operatorname{Re} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-(\varepsilon + ia)x} dx + \\ &= \operatorname{Re} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{2(\varepsilon + ia)^{3/2}} = \operatorname{Re} \frac{\sqrt{\pi}}{2(ia)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{Re} [(e^{\pi i/2})^{-3/2}] = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{(2a)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Совершенно другой подход к регуляризации расходящихся рядов и интегралов основан на теории обобщенных функций [19, 71]. В указанных монографиях можно найти детальный сравнительный анализ методов обобщенного суммирования и регуляризации обобщенных функций. В сфере того, чем мы занимаемся в этом разделе, следующая техника дает подходящую трактовку для рядов такого рода.

Рассмотрим ряд

$$S(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\alpha), \quad (1.53)$$

все члены которого — аналитические функции комплексного параметра α в области D , $\alpha = \operatorname{Re}(\alpha) + i \operatorname{Im}(\alpha) \in D$, при этом $S(\alpha)$ аналитична в области D . Тогда (регуляризованное) значение ряда (если оно существует) для $\alpha = \alpha_0 \notin D$ есть аналитическое продолжение функции $S(\alpha)$ из области D , где она аналитична, до значения α_0 .

Схожая идея применима и к расходящимся интегралам. Пусть $f(x, \alpha)$ аналитична по комплексному параметру $\alpha \in D$ и интеграл

$$S(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx \quad (1.54)$$

представляет собой аналитическую функцию в D (любой предел интегрирования здесь может быть равен $\pm\infty$). Тогда аналитическое продолжение из области D до значения $\alpha = \alpha_0 \notin D$ называется регуляризованным значением интеграла $S(\alpha_0)$.

Продemonстрируем эти определения для примеров 1 и 2, рассмотренных выше.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$S_1(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} \cos(am), \quad 0 < a < 2\pi, \quad (1.55)$$

которая аналитична в бесконечной области $D = \{\operatorname{Re}(\alpha) < 0\}$. В данной области ряд обладает обычной суммой [20]

$$S_1(\alpha) = \frac{(2\pi)^{-\alpha}}{4\Gamma(-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)} \left[\zeta\left(1+\alpha, \frac{a}{2\pi}\right) + \zeta\left(1+\alpha, 1-\frac{a}{2\pi}\right) \right], \quad (1.56)$$

где $\zeta(s, v) = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+v)^s$ — обобщенная дзета-функция Римана. Как следует из (1.56), функция $S_1(\alpha)$ может быть продолжена аналитически вплоть до значения $\alpha = 1$. Здесь следует учесть предел при $\alpha \rightarrow 1$ [65]

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)} \sim \frac{\alpha-1}{\cos(\pi\alpha/2)} \sim -\frac{1}{(\pi/2)\sin(\pi\alpha/2)} \rightarrow -\frac{2}{\pi} \quad (1.57)$$

и предельное значение

$$\begin{aligned} \zeta(2, z) + \zeta(2, 1-z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1-z)^2} = \psi'(z) + \psi'(1-z) = \\ &= [\psi(z) - \psi(1-z)]' = -\pi[\operatorname{ctg}(\pi z)]' = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$. Собирая вместе формулы (1.55)–(1.58), приходим к тому же результату, что и в (1.50): $S_1(\alpha = 1) = -1/[4\sin^2(a/2)]$. Для других значений параметра a , вне интервала $(0, 2\pi)$, данное равенство может быть продолжено периодически.

Пример 2. Функция

$$S_2(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} \cos(ax) dx \quad (a > 0) \quad (1.59)$$

является аналитической в области $D = \{-1 < \operatorname{Re}(\alpha) < 0\}$, где ее значение равно [20]

$$S_2(\alpha) = -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{a^{\alpha+1}} \sin \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (1.60)$$

Аналитическое продолжение $S_2(\alpha)$ до точки $\alpha = 1/2$ равно

$$S_2(1/2) = -\frac{\Gamma(3/2)}{a^{3/2}} \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{\pi}}{(2a)^{3/2}}, \quad (1.61)$$

что совпадает с (1.52).

Объединение преобразования Фурье с концепцией обобщенных функций позволяет применить преобразование Фурье к таким функци-

ям, для которых оно не существует в обычном смысле. Как правило, оно применимо к функциям, которые не обращаются в нуль на бесконечности и, таким образом, не интегрируемы. Это автоматически влечет за собой то, что классическое преобразование Фурье для подобного рода функций не является конечным. Подробная теория преобразования Фурье для обобщенных функций дается, например, в книгах [71, 133]. Здесь приведем лишь некоторые классические результаты, которые могут быть полезны в том или ином виде для дальнейшего изложения. Наиболее важные применения относятся к свойствам *дельта-функции* Дирака.

Прежде всего, преобразование Фурье ступенчатой функции является дельтой Дирака. Приведем некоторые полезные свойства этой функции и ее связь с другими функциями:

$$1(x) \Rightarrow 2\pi\delta(s), \quad \frac{d}{dx}|x| = \text{sign}(x), \quad \frac{d}{dx}\text{sign}(x) = 2\delta(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = f(x). \quad (1.62)$$

Примечание. В прикладной математике, механике или физике специалисты доверяют скорее конкретным результатам, полученным на компьютере, нежели абстрактной теории обобщенных функций. В этой связи с целью тестирования корректности данной абстрактной теории можно организовать численный эксперимент для ряда задач. В частности, на любом алгоритмическом языке легко написать программу, которая реализует вычисления по формулам — таким, как, например, (1.50). Тогда в случае $a = \pi$ для суммы ряда $S_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m x^m$ получатся значения, приведенные в таблице для различных x . Мы взяли верхний предел суммирования в бесконечном ряду равным 10^4 , и при помощи программы на Фортране (вычисления с двойной точностью) получили значения, приведенные в таблице.

x	0,89	0,91	0,93	0,95	0,97	0,99
$S_1(x)$	-0,24915	-0,24944	-0,24967	-0,24983	-0,24994	-0,24999

При $x \rightarrow 1 - 0$, ряд стремится к значению $S_1(1) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m = -1/[4\sin^2(\pi/2)] = -0,25$.

Так же можно протестировать формулы (1.52), (1.61). Результаты вычислений с тем же верхним пределом интегрирования 10^4 для $a = 1/2$ и различных ε приведены в следующей таблице.

ε	0,011	0,009	0,007	0,005	0,003	0,001
S_2	-1,710	-1,722	-1,738	-1,742	-1,751	-1,776

Данные значения следует сопоставить со значением $S_2(1/2) = -\sqrt{\pi} = -1,772$.

1.4. Асимптотические оценки интегралов

При решении многих задач типична ситуация, когда не удается построить точное аналитическое решение сложной задачи математической физики, однако удается найти приближенное решение в некотором специальном диапазоне определенного физического параметра (обычно большом или малом). В таких случаях весьма полезна идея асимптотических оценок.

Будем говорить, что бесконечный набор функций $\{g_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ образует *асимптотическую шкалу* при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, если $g_{n+1}(\lambda) = o(g_n(\lambda))$, $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Можно легко доказать, что если $\{g_n(\lambda)\}$ является асимптотической шкалой, то функции $\{g_n^{\delta}(\lambda)\}$ также образуют шкалу для любого $\delta > 0$. На практике чаще всего используются случаи $\lambda_0 = 0$ или $\lambda_0 = \infty$, когда естественные шкалы образуются степенными и логарифмическими функциями.

В частности, $\{\lambda^{-\mu_n}\}$, где $\mu_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, образуют шкалу при $\lambda \rightarrow +\infty$, и аналогичное утверждение справедливо для шкалы, образуемой функциями $\{(\ln \lambda)^{-\mu_n}\}$. Определенная комбинация степенных и логарифмических функций типа $\{\lambda^{-\delta_n} (\ln \lambda)^{-\mu_n}\}$ также может формировать асимптотические шкалы при $\lambda \rightarrow +\infty$. По аналогии оба набора $\{\lambda^{\mu_n}\}$ и $\{[\ln(1/\lambda)]^{-\mu_n}\}$, как и некоторые их комбинации, составляют асимптотические шкалы при $\lambda \rightarrow +0$.

Если $\{g_n(\lambda)\}$ образуют асимптотическую шкалу при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, тогда формальное разложение $f(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(\lambda)$ называется полным *асимптотическим разложением* функции $f(x)$ при $\lambda \rightarrow x_0$, если для любого $N = 0, 1, 2, \dots$

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^N a_n g_n(\lambda) + o(g_N(\lambda)), \quad \lambda \rightarrow \lambda_0. \quad (1.63)$$

В случае когда соотношение (1.63) справедливо только для некоторого N , оно представляет асимптотическое разложение порядка N . Как правило, в сложных задачах только главный асимптотический член ($N = 0$) может быть выражен в достаточно простом виде. Последующие члены асимптотики обычно требуют слишком громоздких преобразований.

Наиболее распространенный тип интегралов, допускающий естественные асимптотические оценки, содержит большой асимптотический параметр в аргументе экспоненциальной функции. В случае когда фазовая функция $S(x)$ вещественнозначна, приходим к интегралу Лапласа [58]

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (a < b \leq \infty). \quad (1.64)$$

Если плотность $f(x)$ и фаза $S(x)$ — гладкие функции (более точно — если $f(x), S(x) \in C^\infty[a, b]$) и $\max_{x \in [a, b]} S(x) = S(x_0)$, где x_0 — внутренняя точка интервала $[a, b]$, тогда полное степенное асимптотическое разложение для $I(\lambda)$ выражается в следующем виде [55, 58]:

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx \sim e^{\lambda S(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1/2}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.65)$$

$$c_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{(2n-1)!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left\{ f(x) \left[\frac{S(x_0) - S(x)}{(x - x_0)^2} \right]^{-n-1/2} \right\}.$$

Эвристически, основной асимптотический вклад в интеграл $I(\lambda)$ вносит малая окрестность точки x_0 (где $S'(x_0) = 0$), а относительный вклад всех остальных точек экспоненциально мал.

Из (1.65) очевидно, что главный асимптотический член равен

$$I(\lambda) \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} + O(\lambda^{-3/2}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.66)$$

где, очевидно, $S''(x_0) < 0$ в точке x_0 локального максимума. Оценка (1.66) также справедлива для $f(x) \in C_1[a, b]$.

В случае когда точка x_0 глобального максимума совпадает с граничной точкой ($x_0 = a$ или $x_0 = b$), рассматриваемый интеграл (1.64) обычно выглядит как интегральное преобразование Лапласа:

$$I(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x) \exp(-\lambda x^\alpha) dx \quad (\alpha, \beta > 0, \quad 0 < a \leq \infty). \quad (1.67)$$

Если здесь $f(x) \in C^\infty[0, a]$, то асимптотическое разложение определяется леммой Ватсона [55, 58].

Лемма (Ватсона).

$$I(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \lambda^{-(n+\beta)/\alpha},$$

$$\lambda \rightarrow +\infty. \quad (1.68)$$

Оценки вроде (1.65) и (1.68) могут быть выведены после некоторых предварительных преобразований либо с помощью интегрирования по частям, либо с использованием разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

Для произвольной аналитической фазовой функции преобразование Лапласа (1.67) допускает такое же интегрирование по частям, что

приводит к следующему асимптотическому разложению ($0 < a \leq \infty$):

$$I(\lambda) = \int_0^a f(x) e^{-\lambda S(x)} dx \sim e^{-\lambda S(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda^{n+1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.69)$$

$$c_n = \left(\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=0}, \quad f(x), S(x) \in C^\infty[0, a],$$

если $x_0 = 0$ — точка глобального максимума фазы $S(x)$.

Пример. Продемонстрируем асимптотическое разложение с логарифмической шкалой. Интеграл

$$J(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad (1.70)$$

конечен в классическом смысле, так как особенность при $x \rightarrow 0$ интегрируема, что может быть доказано интегрированием по частям:

$$J(\lambda) = -e^{-\lambda x} \frac{1}{\ln x} \Big|_{x=0}^{\infty} - \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\ln x} dx = -\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\ln x} dx. \quad (1.71)$$

Если нас интересует асимптотическая оценка $J(\lambda)$ для больших λ , то можно воспользоваться разложением Тейлора:

$$J(\lambda) = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\ln(x/\lambda)} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\ln \lambda - \ln x} = \frac{1}{\ln \lambda} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{1 - (\ln x / \ln \lambda)} \sim$$

$$\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln \lambda)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} \ln^n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^{(n)}(1)}{(\ln \lambda)^{n+1}}, \quad (1.72)$$

где значение последнего интеграла взято из таблиц [20].

В теории дифракции экспоненциальное ядро в интегралах довольно часто бывает не положительной функцией, как в (1.64), (1.67), а осциллирующей. Следующая лемма аналогична лемме Ватсона для интегралов с положительными ядрами [55, 58].

Лемма (Эрдейи). Пусть $a \leq \infty$, $\alpha, \beta > 0$, $f(x) \in C^\infty[0, a]$ и $f^{(n)}(a) = 0$ ($\forall n = 0, 1, 2, \dots$). Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (-i\lambda)^{-(n+\beta)/\alpha}. \quad (1.73)$$

Интеграл Фурье в наиболее общем виде

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx, \quad S(x) \neq \text{const}, \quad (1.74)$$

где фазовая функция $S(x)$ вещественнозначна, также может быть оценен подобным образом. При росте параметра λ экспоненциальная функция в (1.74) становится быстроосциллирующей, тем не менее сам интеграл асимптотически мал, так как вклады его положительных и отрицательных частей взаимно сокращаются. Единственный неясный вопрос — насколько он мал?

Если $f(x), S(x) \in C^\infty[a, b]$ и $S'(x) \neq 0, x \in [a, b]$ ($a < b < \infty$), то

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \sim \\ &\sim e^{i\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(i\lambda)^{n+1}} - e^{i\lambda S(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{(i\lambda)^{n+1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.75) \\ d_n &= \left(\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=a}, \quad e_n = \left(\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=b}. \end{aligned}$$

Из последнего разложения следует, что с экспоненциально малой ошибкой основной вклад в асимптотику $I(\lambda)$, $\lambda \rightarrow +\infty$, вносят малые окрестности граничных точек a и b , а главный член имеет порядок $O(1/\lambda)$, $\lambda \rightarrow +\infty$. Если $f(x) \in C_1[a, b]$, то оценка (1.75) остается справедливой, но содержит лишь главные вклады от концов интервалов $[a, b]$. В случае когда плотность $f(x)$ обращается в нуль на концах интервалов вместе со всеми производными, $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b) = 0 \quad \forall n$, значение $I(\lambda)$ экспоненциально мало.

Следует отметить, что формально структура формул (1.69) и (1.75) достаточно похожа. Это следствие того, что оба разложения выводятся с помощью интегрирования по частям. Тем не менее глубинная суть данных разложений совершенно разная. Первое из разложений следует из того, что подынтегральное выражение экспоненциально убывает вдали от конца $x_0 = 0$. Второе, напротив, определяется взаимным сокращением положительного и отрицательного вкладов вдали от конечных точек.

Определение. Точка $x_0 \in (a, b)$, где $S'(x_0) = 0$, называется **стационарной точкой**.

Интуитивно понятно, что так как стационарная точка одновременно является и точкой локального экстремума, то фазовая функция $S(x)$ почти постоянна в малой окрестности любой стационарной точки. Таким образом мы ожидаем, что ее вклад в интеграл $I(\lambda)$ (1.75) асимптотически более значим, нежели вклад от концов. Точный результат

формулируется в виде следующего утверждения, которое представляет собой *метод стационарной фазы*.

Пусть $f(x), S(x) \in C^\infty[a, b]$ и пусть существует только одна внутренняя стационарная точка x_0 : $a < x_0 < b$, $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$. Тогда если $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b) = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$, то

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^{n+1/2}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.76)$$

где главный асимптотический член при $\lambda \rightarrow +\infty$ равен

$$I(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}} e^{i[\lambda S(x_0) + \pi\delta/4]} \left[f(x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right], \quad \delta = \text{sign}[S''(x_0)]. \quad (1.77)$$

Заметим, что вклад стационарной точки имеет порядок $O(\lambda^{-1/2})$ (сравним со вкладом граничной точки, который имеет порядок $O(1/\lambda)$). Заметим также, что если на интервале $x \in (a, b)$ имеется несколько стационарных точек, то полная асимптотика дается суммой вкладов от всех таких точек.

Метод стационарной фазы может быть распространен на кратные интегралы [54, 55]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область и пусть плотность $f(x) \in C^\infty(\Omega)$ является функцией с компактным носителем (т.е. она стремится к нулю при приближении к границе Ω вместе со всеми своими частными производными). Пусть вещественнозначная фаза $S(x)$, $x \in \Omega$, обладает единственной стационарной точкой $x_0 \in \Omega$ такой, что градиент $S'(x_0) = 0$ и $\det S''(x_0) \neq 0$, где $S''(x)$ — гессиан функции $S(x)$, т.е. матрица вторых частных производных $\partial^2 S / \partial x_n \partial x_k$. Тогда многомерный метод стационарной фазы определяет вклад от стационарной точки следующим образом:

$$I(\lambda) = \int_{\Omega} f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \sim e^{i\lambda S(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^{n+N/2}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.78)$$

с главным асимптотическим членом, равным

$$I(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{N/2} e^{i[\lambda S(x_0) + \pi i \delta / 4]} \frac{f(x_0)}{\sqrt{|\det S''(x_0)|}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.79)$$

где $\delta = \nu_+[S''(x_0)] - \nu_-[S''(x_0)]$ — разница между количеством положительных и отрицательных собственных значений гессиана $S''(x)$ в стационарной точке x_0 .

Иногда важно знать поведение интеграла Лапласа (1.67) не только для больших, но и для малых значений λ . Этот вопрос более сложен. Основной результат устанавливается следующим утверждением [42, 85].

Утверждение. Если

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^{\mu_n}}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad n < \mu_n < n+1 \quad (c_0 \neq 0), \quad (1.80)$$

то

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Gamma(1 - \mu_n) \lambda^{\mu_n - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} d_n \lambda^n, \\ \lambda \rightarrow +0, \quad d_n = \int_0^{\infty} x^n \left[f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{c_j}{x^{\mu_j}} \right] dx. \quad (1.81)$$

Заметим что μ_n в формулах (1.80), (1.81) — не целые. В случае целых μ_n разложение выглядит иначе: если

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (c_1 \neq 0), \quad (1.82)$$

то

$$I(\lambda) \sim \ln \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_{n+1} \lambda^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_n \lambda^n, \quad \lambda \rightarrow +0, \\ e_n = \int_0^1 x^n \left[f(x) - \sum_{j=1}^n c_j x^{n-j} \right] dx + \int_1^{\infty} x^n \left[f(x) - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{c_j}{x^j} \right] dx + \\ + c_{n+1} \left[\Gamma'(1) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right]. \quad (1.83)$$

Эти результаты могут быть распространены на интегралы типа Фурье. Если поведение функции $f(x)$ на бесконечности задается формулой (1.80), то

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Gamma(1 + n - \mu_n) (-1)^n (-i\lambda)^{\mu_n - 1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} (i\lambda)^n, \quad \lambda \rightarrow +0, \quad (1.84)$$

где d_n — то же, что и в (1.81).

В случае когда μ_n — положительные целые числа, т. е. если $f(x)$ обладает для больших x асимптотикой вида (1.82), имеем [43, 83]

$$I(\lambda) \sim -\ln \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} (i\lambda)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{n!} (i\lambda)^n, \quad \lambda \rightarrow +0, \quad (1.85)$$

$$h_n = e_n + \frac{\pi i}{2n!},$$

где e_n задается формулой (1.83).

Примечания

1. Сравнивая асимптотические ряды с обычными сходящимися рядами, легко понять принципиальные различия в их свойствах. Если трактовать разложение (1.63) как бесконечный ряд (с $N = \infty$), то сходимость обычного ряда подразумевает, что разность между левой и правой частями в уравнении (1.63) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Разложение (1.63), трактуемое, напротив, в асимптотическом смысле, подразумевает, что эта невязка стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Из этого можно сделать вывод, что обычный сходящийся ряд, как правило, не представляет собой никакого асимптотического ряда. И наоборот, много асимптотических рядов, весьма полезных для эффективных вычислений с λ , близким к λ_0 , не сходятся в классическом смысле.

2. Если сравнить асимптотическое поведение преобразования Лапласа

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx \quad (1.86)$$

для больших (1.68) и малых (1.81) значений параметра λ в случае, когда главный член плотности является нецелой степенью, довольно неожиданно оказывается, что главные асимптотические члены совпадают в том смысле, что если

$$f(x) \sim A x^{\mu} \quad (-1 < \mu < 0), \quad x \rightarrow \begin{cases} +0 \\ +\infty \end{cases},$$

то

$$F(\lambda) \sim A \Gamma(1 + \mu) \lambda^{-\mu-1}, \quad \lambda \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ +0 \end{cases} \quad (1.87)$$

($A = \text{const}$). Весьма примечательно, что соответствующие главные члены для интегралов Фурье имеют ту же форму (см. (1.73), (1.83) с $n = 0$), если формально подставить $-i\lambda$ вместо λ в интеграл Лапласа.

3. Выше мы рассмотрели только вещественные и мнимые фазы. В некоторых задачах фаза $S(x)$ оказывается комплексной, что приводит к так называемому **методу наискорейшего спуска**, детально описанному в литературе (см. например, [54]). Данный метод разработан таким образом, чтобы можно было иметь дело с более общими случаями, нежели интеграл Лапласа или осциллирующие интегралы.

Удивительно, но после некоторых тонких преобразований почти всегда подобные задачи могут быть сведены к комбинации интегралов типа Лапласа и типа Фурье.

Например, интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} e^{-\gamma(\alpha)y} d\alpha, \quad \gamma(s) = \sqrt{\alpha^2 - k^2} \quad (k > 0), \quad (1.88)$$

где $y > 0$, и мы предполагаем для простоты, что функция $F(s)$ четна (так что J является четной относительно x). Обычно эта функция изучается для $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ методом наискорейшего спуска [105] с помощью определенных трансформаций контура интегрирования в комплексной плоскости (вспомним аналитические свойства ветвящейся функции $\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, раздел 1.1). Покажем, что интеграл (1.88) может быть корректно оценен по действительному лучу $\text{Im}(\alpha) = 0$, $\text{Re}(\alpha) \geq 0$:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} F(\alpha) (e^{i\alpha|x|} + e^{-i\alpha|x|}) e^{-\gamma(\alpha)y} d\alpha = \\ &= \int_0^k F(\alpha) (e^{i\alpha|x|} + e^{-i\alpha|x|}) e^{i\sqrt{k^2 - \alpha^2}y} d\alpha + \\ &+ \int_k^{\infty} F(\alpha) (e^{i\alpha|x|} + e^{-i\alpha|x|}) e^{-\sqrt{\alpha^2 - k^2}y} d\alpha = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Главный член асимптотики второго интеграла в (1.89) может быть вычислен из (1.67), где $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$, $\lambda = y$, $n = 0$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{\infty} F(\alpha + k) [e^{i(\alpha+k)|x|} + e^{-i(\alpha+k)|x|}] e^{-\sqrt{\alpha+2k}y} e^{-\sqrt{\alpha}y} d\alpha \right| \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} |F(\alpha + k)| e^{-\sqrt{\alpha}y} d\alpha, \quad J_2 \sim O\left(\frac{1}{y^2}\right), \quad y \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Это соотношение выполняется равномерно по $|x| < \infty$. Для любого фиксированного y второй интеграл J_2 может быть определен для $x \rightarrow \infty$ из (1.75) как $O(1/|x|)$. Следовательно, $J_2 \sim O(1/r)$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

Первый интеграл J_1 может быть оценен методом стационарной фазы. Пусть $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$, $r \rightarrow \infty$. Тогда в интеграле

$$J_1 = \int_0^k F(\alpha) \left[e^{ir(\sqrt{k^2 - \alpha^2} \cos \varphi - \alpha \sin \varphi)} + e^{ir(\sqrt{k^2 - \alpha^2} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi)} \right] d\alpha \quad (1.91)$$

фаза $S(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \cos \varphi - \alpha \sin \varphi$ первого члена не имеет стационарных точек ($S'(\alpha) \neq 0$, $0 \leq \alpha \leq k$), так что ее поведение снова порядка $O(1/r)$. Второй член имеет фазу $S(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi$ со стационарной точкой $\alpha_0 = k \sin \varphi$, $S'(\alpha_0) = 0$. Принимая во внимание, что $S''(\alpha_0) = -1/(k \cos^2 \varphi)$, $\delta = -1$, $S(\alpha_0) = k$, таким образом приходим к окончательному результату в соответствии с формулой (1.77):

$$J \sim \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} \cos \varphi e^{i(kr - \pi/4)} f(k \sin \varphi) + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.92)$$

4. На практике почти всегда можно построить главный асимптотический член, напрямую полагая λ стремящимся к бесконечности. Такой подход, как правило, может быть обоснован на уровне теоремы. Например, интеграл

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int_0^\infty \frac{J_0(t) dt}{\sqrt{t^2 + (a\lambda)^2}} \quad (1.93)$$

после замены переменной $\lambda x = t$ может быть оценен в предположении $\lambda \sim +\infty$. Это приводит к тому, что первое слагаемое под знаком квадратного корня пренебрежимо мало по сравнению с $(a\lambda)^2$. В итоге главный асимптотический член при $\lambda \rightarrow +\infty$ приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \sim \frac{1}{a\lambda} \int_0^\infty J_0(t) dt = \frac{1}{a\lambda}, \quad \left(\int_0^\infty J_0(t) dt = 1 \right), \quad (1.94)$$

где мы воспользовались значением табличного интеграла [20].

В случае когда не удастся применить такую простую и явную процедуру, весьма вероятно, что истинное асимптотическое разложение включает логарифмическую или дробно-степенную функцию вместо целых степеней. К примеру, интеграл

$$\int_0^\infty \frac{J_0^2(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int_0^\infty \frac{J_0^2(t) dt}{\sqrt{t^2 + (a\lambda)^2}}, \quad (1.95)$$

который родственен (1.93), нельзя оценить тем же методом для больших λ , так как интеграл $\int_0^\infty J_0^2(t) dt$ расходится на бесконечности. Как правило, это верный признак того, что появится логарифмическая

шкала. Такая же особенность имеет место для обоих интегралов (1.93), (1.95) при $\lambda \rightarrow 0$, так как все возникающие интегралы, получающиеся в пределе при $\lambda \rightarrow +0$, а именно

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (J_0(0) = 1), \quad \int_0^{\infty} \frac{J_0(t) dt}{t}, \quad \int_0^{\infty} \frac{J_0^2(t) dt}{t}, \quad (1.96)$$

расходятся — первый на бесконечности, а остальные в нуле.

5. Явление, описанное в примечании 4, относится к очень сложному случаю, когда подынтегральное выражение не содержит логарифмической функции, но асимптотическое разложение приводит к логарифмической шкале. В этом случае мы рекомендуем приводить интеграл к комбинации стандартных специальных функций, хорошо исследованных за последние сто лет. Их асимптотики подробно описаны.

Например, интеграл (1.93) — это

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = I_0\left(\frac{a\lambda}{2}\right) K_0\left(\frac{a\lambda}{2}\right), \quad (1.97)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя порядка 0, а K_0 — функция Макдональда того же порядка. В результате имеем полные асимптотики при $\lambda \rightarrow +\infty$ [1]:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \sim \frac{1}{a\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(a\lambda)^{2n+1}} \prod_{j=1}^n (2j-1)^2, \quad (1.98)$$

которые, в частности, дают наш главный член (1.94).

Представление (1.97) также допускает разложение по малому λ , которое содержит логарифмические функции. Оно может быть получено из рядов

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$K_0(z) = -[\ln(z/2) + \gamma] I_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{(n!)^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right), \quad (1.99)$$

где $\gamma = 0,577216$ — постоянная Эйлера. В частности, первые два главных члена асимптотики имеют вид

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \sim -\ln \lambda + [\ln(4/a) - \gamma] + O(\lambda^2 \ln \lambda), \quad \lambda \rightarrow +0. \quad (1.100)$$

Та же идея может быть применена к интегралу (1.95). Для этого используем интегральное представление [1]

$$J_0^2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_0(2t \cos \psi) d\psi, \quad (1.101)$$

которое с помощью (1.97) дает

$$\int_0^\infty \frac{J_0^2(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} I_0(a\lambda \cos \psi) K_0(a\lambda \cos \psi) d\psi. \quad (1.102)$$

Пользуясь рядом (1.99), для малых λ окончательно получаем

$$\int_0^\infty \frac{J_0^2(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \sim -\ln \lambda + [\ln(4/a) - 2\gamma] + O(\lambda^2 \ln \lambda), \quad \lambda \rightarrow +0, \quad (1.103)$$

так как [20]

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos \psi) d\psi = \pi(\gamma - \ln 2)/2.$$

Наиболее сложна задача построения асимптотик для интеграла (1.80) при $\lambda \rightarrow +\infty$, которая нуждается в более тонком подходе. С помощью табличных интегралов [20] можно заметить, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_0^2(\lambda x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty J_0^2(x) dx \int_0^\infty \cos(\xi x) K_0(|\alpha|\xi) d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(|\alpha|\xi) \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \xi > 2 \\ \frac{1}{2} P_{-1/2} \left(\frac{\xi^2}{2} - 1 \right), & 0 < \xi < 2 \end{array} \right\} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi|\alpha|} \int_0^{2|\alpha|} K_0(\xi) P_{-1/2} \left(\frac{\xi^2}{2\alpha^2} - 1 \right) d\xi, \quad (1.104) \end{aligned}$$

где $P_\nu(x)$ — функция Лежандра, чье асимптотическое поведение вблизи особой точки $x = -1$ имеет вид [65]

$$P_\nu(x) \sim \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \left[\ln \frac{1+x}{2} + \gamma + 2\psi(\nu+1) + \pi \operatorname{ctg}(\pi\nu) \right] + o(1). \quad (1.105)$$

Теперь асимптотический результат напрямую следует из экспоненциального затухания функции Макдональда на бесконечности, что определяет первые два главных асимптотических члена в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{J_0^2(x) dx}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} &\sim -\frac{1}{\pi^2 |\alpha|} \int_0^{\infty} K_0(\xi) \left[\ln \frac{\xi^2}{4\alpha^2} + \gamma + 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] d\xi = \\
&= \frac{1}{\pi |\alpha|} \left[\ln |\alpha| - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + 2\ln 2 + \frac{\gamma}{2} \right] = \\
&= \frac{1}{\pi |\alpha|} \left[\ln |\alpha| + 4\ln 2 + \frac{3}{2}\gamma \right], \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (1.106)
\end{aligned}$$

так как $\psi(1/2) = -(\gamma + 2\ln 2)$. Здесь были приняты во внимание табличные интегралы [20]

$$\int_0^{\infty} K_0(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} K_0(\xi) \ln \xi d\xi = -\frac{\pi}{2} (\ln 2 + \gamma). \quad (1.107)$$

1.5. Теория Фредгольма для интегральных уравнений второго рода

Теория интегральных уравнений второго рода

$$u(x) - \mu \int_S G(x, \xi) u(\xi) ds(\xi) = f(x), \quad x \in S, \quad (1.108)$$

была создана Фредгольмом и далее развита Риссом (см., например, [44]). Здесь правая часть $f(x)$ и ядро $G(x, \xi)$ — это некоторые известные функции, μ — известный параметр, S — кусочно-гладкая поверхность (или кривая), $u(x)$ — неизвестная функция. Для того чтобы явно определить переменную (x или ξ), по которой применяется интегрирование, мы явно указываем, что элемент ds зависит от переменной ξ .

Следующие результаты теории Фредгольма можно считать классическими. Запишем уравнение (1.108) как линейное функциональное уравнение

$$(I - \mu G)u = f, \quad (Gu)(x) = \int_S G(x, \xi) u(\xi) ds(\xi), \quad (1.109)$$

и рассмотрим его в нормированном пространстве непрерывных функций $X = C(S)$ с нормой $\|\varphi\|_{C(S)} = \max_{x \in S} |\varphi(x)|$. Множество $U \subset X$ называется *компактным*, если произвольная последовательность $\{u_n\} \subset U$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 1 (Арцела–Асколи). *Множество $U \subset X$ функций $u(x)$, $x \in S$, компактно в $C(S)$ тогда и только тогда, когда:*

1) *существует постоянная A такая, что $|u(x)| \leq A$ для всех $x \in S$ и всех $u(x) \in U$;*

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что для всех $x, y \in S$: $|x - y| < \delta$ и всех $u(x) \in U$ справедливо неравенство $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

Первое свойство подразумевает, что множество U равномерно ограничено в $C(S)$, а второе — что функции из U равностепенно непрерывны.

Оператор $G: X \rightarrow X$ называется *компактным*, если он отображает любое ограниченное множество в компактное. Хорошо известно, что любой компактный линейный оператор непрерывен (т.е. ограничен). Ниже в этом разделе мы будем рассматривать только компактные операторы G .

Простая теорема утверждает, что если ядро уравнения (1.108) непрерывно по обоим своим переменным, $G(x, \xi) \in C(S \times S)$, то оператор G в (1.109) — компактный. Доказательство следует напрямую из теоремы Арцела–Асколи. Такой же результат имеет место, если оператор G слабосингулярный, т.е. если ядро $G(x, \xi)$ непрерывно для $x \neq \xi$ и $G(x, \xi) \leq B|x - \xi|^{\alpha-n}$ ($0 < \alpha < 1$) (n — размерность S , т.е. $n = 2$ когда S — это поверхность, и $n = 1$ в случае, когда S — кривая). Ядро $G(x, \xi)$ со слабой особенностью интегрируемо по S . Заметим что логарифмическая особенность при $G(x, \xi) \sim A \ln |x - \xi|$, $\xi \rightarrow x$, тоже слаба. Следует также отметить, что такие же свойства компактности, как в $C(S)$, имеют место и в гильбертовом пространстве $L_2(S)$.

Два оператора $A, B: X \rightarrow X$ называются *сопряженными* друг другу, если для всех u, v имеем $(Au, v) = (u, Bv)$. Очевидно, что если $G(x, \xi)$ в (2) является непрерывным или слабосингулярным, то интегральный оператор G^* с ядром $G^*(x, \xi) = \overline{G}(\xi, x)$ сопряжен с оператором G . Таким образом, любое симметричное вещественное ядро определяет некоторый *самосопряженный* оператор.

Теорема 2 (первая теорема Фредгольма). *Подпространство решений однородных уравнений*

$$(I - \mu G)u = 0, \quad (I - \mu G^*)v = 0 \quad (1.110)$$

имеет одинаковую конечную размерность $n < \infty$ в X . В частности, это подпространство может быть пустым (т.е. $n = 0$).

Теорема 3 (вторая теорема Фредгольма). *Неоднородные уравнения*

$$(I - \mu G)u = f, \quad (I - \mu G^*)v = g \quad (1.111)$$

имеют решения тогда и только тогда, когда $(f, v_j) = 0$, $(u_j, g) = 0$ для всех решений сопряженных однородных уравнений

$$(I - \mu G)u_j = 0, \quad (I - \mu G^*)v_j = 0. \quad (1.112)$$

Из этих двух теорем вытекает следующая.

Теорема 4 (альтернатива Фредгольма, или третья теорема Фредгольма). Если однородные уравнения (1.110) обладают (одновременно) только тривиальным решением $u = 0$, $v = 0$, то неоднородные уравнения (1.111) имеют единственные решения для всех $f, g \in C(S)$. В этом случае существуют непрерывные обратные операторы $(I - \mu G)^{-1}$, $(I - \mu G^*)^{-1}$. В случае если уравнения (1.110) имеют (одновременно) нетривиальные решения, неоднородные уравнения (1.111) имеют решение тогда и только тогда, когда справедливо соотношение (1.112).

Определение. Множество нерегулярных значений параметра λ , относящееся ко второму случаю в альтернативе Фредгольма, когда $Gu_j = \lambda u_j$, $u_j \neq 0$, называется **спектром** оператора G , или множеством его **собственных значений**. Соответствующие значения $\mu = 1/\lambda$ называются **характеристическими значениями** G .

Теорема 5 (четвертая теорема Фредгольма). Набор характеристических значений интегральных операторов с непрерывными или слаборегулярными ядрами состоит из (возможно, комплекснозначного) счетного дискретного набора μ_n , $n = 1, 2, \dots$, который не имеет конечной предельной точки.

Изложенная коротко теория снабжает нас мощным методом для решения интегральных уравнений второго рода. Прежде всего ясно, что для достаточно малого μ всегда имеет место первая из двух возможностей в альтернативе Фредгольма, и уравнения (1.111) при этом однозначно разрешимы для всех $f, g \in C(S)$. Проведем доказательство от противного. Если существует нетривиальное решение u_j уравнения (1.110)₁, то $u_j = \mu Gu_j$, что подразумевает $\|u_j\| = |\mu| \|Gu_j\| \leq |\mu| \|G\| \|u_j\| \sim |\mu| \geq 1/\|G\|$, а это противоречит предположению о том, что μ достаточно мало.

Другое практически важное следствие из альтернативы Фредгольма состоит в том, что она предопределяет в случае обратимости непрерывную зависимость от правых частей f, g , так как в этом случае $u = (I - \mu G)^{-1}f$, $v = (I - \mu G^*)^{-1}g$ с обоими непрерывными операторами, что гарантирует стабильность решения по отношению к малым возмущениям в f и g . Это свойство весьма важно в контексте того, что обсуждается в главе 8, посвященной теории некорректных задач, которая охватывает также операторные уравнения первого рода.

Более точная оценка максимального значения параметра μ , для которого оператор $I - \mu G$ наверняка обратим, следует из хорошо известной теоремы: если норма оператора $K: X \rightarrow X$ такова, что $\|K\| < 1$, то оператор $(I - K)$ обратим. Из этого утверждения можно заключить, что уравнения (1.108) и (1.109) разрешимы и существует непрерывный обратный оператор $(I - \mu G)^{-1}$ при условии $|\mu| < 1/\|G\|$. Конечно, это не значит, что для больших μ уравнение (1.108) обязательно неразрешимо.

Теория Фредгольма для уравнений второго рода также дает мощный практический инструмент для численного решения таких уравнений. Предположим, что оператор G заменен неким приближенным оператором G_1 , который позволяет провести простое и прямое численное решение таким образом, что решение уравнения $(I - \mu G_1)u_1 = f$ получается гораздо проще, чем уравнения (1.109). Тогда, если оператор $(I - \mu G)^{-1}$ ограничен и

$$\|G - G_1\| \leq \varepsilon / (\mu \|(I - \mu G)^{-1}\|), \quad (1.113)$$

$0 < \varepsilon \ll 1$, то $(I - \mu G_1)^{-1}$ также ограничен и $\|u - u_1\| \leq \varepsilon \|u\| \|(I - \mu G_1)^{-1}\| / \|(I - \mu G)^{-1}\|$, так как $\|u - u_1\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Для того чтобы это доказать, рассмотрим оператор $(I - \mu G_1) = (I - \mu G) + \mu(G - G_1)$. Заметим, что $(I - \mu G)^{-1}(I - \mu G_1) = (I - \mu G)^{-1}[(I - \mu G) + \mu(G - G_1)] = I + \mu(I - \mu G)^{-1}(G - G_1)$. Тогда согласно последнему замечанию предыдущего раздела и вследствие условия (1.113) оказывается, что оператор $\mu(I - \mu G)^{-1}(G - G_1)$ имеет конечную норму, меньшую единицы (точнее – меньше, чем $\varepsilon < 1$), и, следовательно, оператор $(I - \mu G)^{-1}(I - \mu G_1)$ обратим. Что влечет за собой обратимость $(I - \mu G_1)$. Теперь имеем

$$\begin{aligned} u - u_1 &= u - (I - \mu G_1)^{-1}f = u - (I - \mu G_1)^{-1}(I - \mu G)u = \\ &= u - (I - \mu G_1)^{-1}[(I - \mu G_1) + \mu(G_1 - G)]u = \\ &= -\mu(I - \mu G_1)^{-1}(G_1 - G)u, \end{aligned} \quad (1.114)$$

поэтому

$$\|u - u_1\| \leq \varepsilon \|u\| \|(I - \mu G_1)^{-1}\| / \|(I - \mu G)^{-1}\|, \quad (1.115)$$

что и требовалось доказать.

Последний результат позволяет строить эффективные численные алгоритмы решения уравнения (1.108). Они подробно описаны в литературе (см., например, [64, 84]), и мы рекомендуем использовать наиболее естественный и прямой алгоритм, так называемый **метод коллокации**, который состоит в разбиении области S на N малых подобластей и далее в применении простой квадратурной формулы с постоянной подынтегральной функцией на каждой малой подобласти S_j меры ΔS_j , $j = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} Gu &= \int_S G(x, \xi) u(\xi) d\xi \approx \sum_{j=1}^N G(x, \xi_j) \Delta S_j u_j \approx G_1 u, \\ u_j &= u(\xi_j), \quad \xi_j \in S_j. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Очевидно, что при $N \gg 1$ оператор G_1 представляет собой хорошую аппроксимацию G в области $X = C(S)$.

Если заменить в уравнении (1.108) интегральный оператор G его приближением (1.116) и позволить переменной x пробегать по тому

же набору узлов $\{x_i\}_{i=1}^N = \{\xi_j\}_{j=1}^N$, $x_i = \xi_i \in S_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, то легко прийти к линейной алгебраической системе размерности $N \times N$ относительно неизвестных $u_i = u(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$:

$$u_i - \mu \sum_{j=1}^N G(x_i, \xi_j) \Delta S_j u_j = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.117)$$

Примечания

1. Превосходный обзор существующих методов исследования интегральных уравнений различного типа можно найти в [41, 84]. Описание некоторых эффективных классических численных методов построения решения интегральных уравнения представлено, например, в [84].

2. Довольно неожиданно, что эта элегантная теория Фредгольма абсолютна неприменима к уравнениям первого рода. Более того, как мы увидим ниже, уравнения первого рода обладают противоположными качественными свойствами по отношению к уравнениям второго рода.

1.6. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода

Начнем с попытки извлечь из альтернативы Фредгольма нечто полезное для уравнений первого рода. Как было отмечено в предыдущем разделе, если G — линейный непрерывный компактный оператор, то оператор $(\mu G - I)$ обязательно обратим, если $|\mu|$ достаточно мало, что эквивалентно обратимости $(G - \lambda I)$ для достаточно большого $|\lambda|$ ($\lambda = 1/\mu$). Теперь, при изучении операторного уравнения первого рода

$$Gu = f, \quad (1.118)$$

необходимо оценить, насколько малым может быть λ , обеспечивая при этом существование и ограниченность оператора $(G - \lambda I)^{-1}$. Ясно, что если λ здесь может быть произвольно малым, то весьма вероятно, что оператор G обратим.

Вспомним, что иррегулярные значения параметра λ принадлежат ко второму случаю альтернативы Фредгольма, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение $u_j \neq 0$, $Gu_j = \lambda u_j$, из спектра $\{\lambda_n\}$ оператора G или его собственных значений. Очевидно, для таких $\lambda = \lambda_n$ оператор $(G - \lambda I)^{-1}$ не существует, так как в этом случае существует нетривиальное решение соответствующего однородного уравнения. Для простоты рассмотрим самосопряженный оператор $G^* = G$. В этом случае набор собственных значений может быть полностью описан для положительно определенного оператора.

Определение. Пусть $X = H$ — гильбертово пространство. Тогда линейный непрерывный оператор $G : H \rightarrow H$ называется **положительно определенным**, если $(Gu, u) \geq \gamma^2(u, u) \sim (Gu, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ для всех $u \in H$ с некоторой положительной константой $\gamma > 0$.

Легко доказывается [24, 34], что все собственные значения самосопряженного положительного оператора G положительны и расположены на вещественной оси между γ и нормой оператора $M = \|G\|$: $\gamma \leq \lambda_n \leq M$.

Один из наиболее впечатляющих результатов теории линейных операторов устанавливается следующей теоремой [24].

Теорема 1. *Линейный непрерывный (но необязательно компактный) оператор $G: X \rightarrow Y$, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y , обратим тогда и только тогда, когда однородное уравнение $Gu = 0$ имеет только тривиальное решение $u = 0$.*

Следствие. *Любой самосопряженный положительно определенный линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве обратим.*

В самом деле, если существует нетривиальное решение $u \neq 0$ однородного уравнения $Gu = 0$, это значит, что точка $\lambda_0 = 0$ принадлежит спектральному набору оператора, что невозможно, когда G — самосопряженный и положительно определенный оператор.

К сожалению, эти результаты становятся бесполезными при рассмотрении компактных операторов, вследствие следующей теоремы.

Теорема 2. *Если $G: X \rightarrow Y$ (X и Y — произвольные нормированные пространства) — ограниченный компактный линейный оператор, то обратный ему оператор G^{-1} не существует.*

В самом деле, если G^{-1} непрерывен, то $I = G^{-1}G: X \rightarrow X$ как композиция компактного G и непрерывного G^{-1} операторов отображает любое ограниченное множество $U \subset X$ на компактное множество $V \subset X$, что для единичного оператора I означает $U = V$. Таким образом, в этом случае любой ограниченный набор в X был бы одновременно компактом, что невозможно, если пространство X — не конечномерное.

Этот результат, безусловно, разочаровывает, так как все интегральные операторы с регулярными и даже слабосингулярными ядрами компактны (см. предыдущий раздел). Таким образом, оператор интегрального уравнения Фредгольма первого рода (1.118) не может быть обратимым. Тем не менее это не значит, что уравнение (1.118) не имеет решений для специальных классов правых частей f из множества F пространства Y : $F \subset Y$.

Кроме того, из теоремы 2 и следствия из теоремы 1 следует, что положительный компактный оператор не может быть положительно определенным. В целом не существует конструктивного результата, который бы гарантировал, что уравнение (1.118) обладает решением в том или ином случае. Тем не менее была разработана интересная теория интегральных операторов Фредгольма с ядрами типа свертки. По существу, она связана с теорией слабых (или обобщенных) решений операторных уравнений.

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода. Для простоты ограничимся рассмотрением на конечном интервале вещественной оси. Тривиальной заменой переменных уравнение можно привести к симметричному виду относительно начала координат:

$$Gu = f \sim \int_{-a}^a G(x - \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| < a. \quad (1.119)$$

Предполагаем, что ядро $G(x)$ определено для всех аргументов ($|x| < \infty$). Для дальнейших рассуждений очень важно знать качественные свойства образа Фурье $L(s)$ ядра

$$L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{isx} dx, \quad G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s) e^{-isx} ds. \quad (1.120)$$

Мы предполагаем, что образ Фурье $L(s)$ непрерывный, положительный, четный и ограниченный, $0 < L(s) \leq L_0$. Четность $L(s)$ гарантирует, что ядро $G(x - \xi)$ вещественно и симметрично и оператор G является самосопряженным в вещественном гильбертовом пространстве $H = L_2(-a, a)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} G(x - \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(s) e^{is(x - \xi)} ds = 2 \int_0^{\infty} L(s) \cos[s(x - \xi)] ds = \\ &= 2 \int_0^{\infty} L(s) \cos[s(\xi - x)] ds = \int_{-\infty}^{\infty} L(s) e^{is(\xi - x)} ds = G(\xi - x). \end{aligned} \quad (1.121)$$

Теперь существуют две разные возможности.

1. Нижняя граница $L(s)$ положительна: $0 < l_0 \leq L(s) \leq L_0$. Покажем, что в этом случае оператор G положительно определен в $L_2(-a, a)$ и, следовательно, согласно следствию из теоремы 1, обратим в данном гильбертовом пространстве. В самом деле,

$$\begin{aligned} (Gu, u) &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a G(x - \xi) u(\xi) u(x) dx d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s) |U(s)|^2 ds \geq \\ &\geq \frac{l_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(s)|^2 ds = l_0 \int_{-a}^a u^2(x) dx = l_0(u, u). \end{aligned} \quad (1.122)$$

Здесь было использовано равенство Парсеваля (1.7) и свойство (1.4). Заметим, что для использования этих свойств мы предположили, что функция $u(x)$ расширена на всю ось $x \in (-\infty, \infty)$, за исключением интервала $x \in [-a, a]$, нулевым значением: $u(x) = 0$, $|x| > a$.

Таким образом, G является положительно определенным и уравнение (1.119) обладает единственным решением для произвольного $f(x) \in L_2(-a, a)$.

Следует отметить, что в рассматриваемом случае уравнение (1.118), (1.119) не является стандартным уравнением Фредгольма первого рода. Фактически если бы оно было уравнением типа Фредгольма с компактным оператором G , то G не был бы обратимым. В этом смысле преобразование Фурье $L(s)$ ядра, рассматриваемое здесь, определяет такой оператор, который более похож на оператор Фредгольма второго рода из предыдущего раздела, чем на оператор первого рода.

Для того чтобы объяснить это подробнее, рассмотрим более распространенный случай, когда

$$L(s) = l_0 + \tilde{L}(s), \quad \tilde{L}(s) = O(s^{-\alpha}), \quad \alpha > 1, \quad s \rightarrow \infty. \quad (1.123)$$

Тогда ядро приобретет вид $(\delta(x) - \text{дельта-функция Дирака, см. формулу (1.62)})$

$$G(x) = \frac{l_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}(s) e^{-isx} ds = l_0 \delta(x) + \tilde{G}(x),$$

$$|\tilde{L}(s)| \leq \frac{A}{(|s|+1)^\alpha}, \quad (1.124)$$

так как $\tilde{L}(s)$ ограничен для конечного s , с асимптотическим поведением вида (1.7).

Теперь из (1.8) следует

$$|\tilde{G}(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{L}(s)| ds \leq \frac{A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+1)^\alpha} = \frac{A}{\pi(\alpha-1)}, \quad (1.125)$$

так что ядро $\tilde{G}(x)$ непрерывно и ограничено и образует компактный оператор в $L_2(-a, a)$. Теперь для полного оператора имеем (сравните с (1.62))

$$\begin{aligned} (Gu)(x) &= \int_{-a}^a G(x-\xi)u(\xi) d\xi = \\ &= l_0 \int_{-a}^a \delta(x-\xi)u(\xi) d\xi + \int_{-a}^a \tilde{G}(x-\xi)u(\xi) d\xi = \\ &= l_0 u(x) + (\tilde{G}u)(x) \end{aligned} \quad (1.126)$$

с компактным оператором \tilde{G} . Таким образом, мы пришли к стандартному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, и полученные

здесь результаты позволяют предложить альтернативную трактовку для уравнений Фредгольма второго рода. В частности, если рассматривается интегральное уравнение с ограниченным непрерывным ядром свертки $\tilde{G}(x - \xi)$

$$(I + \tilde{G})u = f \quad (1.127)$$

такое, что преобразование Фурье полного ядра положительно

$$1 + \tilde{L}(s) > 0, \quad \tilde{L}(s) = O(|s|^{-\alpha}), \quad \alpha > 1, \quad s \rightarrow \infty, \quad (1.128)$$

то уравнение (1.10) однозначно разрешимо в $L_2(-a, a)$.

2. Нижняя граница $L(s)$ равна нулю. Наиболее типичен случай, когда $L(s)$ обращается в нуль на бесконечности ($L(s) \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$) как некоторая степень: $L(s) = O(|s|^{-\alpha}), s \rightarrow \infty, \alpha > 0$. Из общих свойств преобразования Фурье следует (см. разделы 1.1 и 1.4), что $G(x - \xi)$ не хуже слабосингулярного ядра. Отсюда G является компактным оператором и, таким образом, не может быть обратимым. Но к изучению данного случая можно применить идеи стандартной теории слабых (обобщенных) решений операторных уравнений в энергетических пространствах.

Пусть $X = H = L_2(-a, a)$. Изучим решение уравнения (1.119) в гильбертовом пространстве. Скалярно умножим обе части уравнения (1.119) на функцию $u(x) \in L_2(-a, a)$

$$(Gu, u) = (f, u). \quad (1.129)$$

Определение. Любая функция $u \in L_2(-a, a)$, которая удовлетворяет равенству (1.129), называется **слабым** или **обобщенным решением** уравнения (1.119).

Выпишем уравнение (1.129) более подробно, используя равенство Парсеваля и теорему свертки преобразования Фурье (сравните с (1.122)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(s) |U(s)|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(s) U(s) ds, \quad (1.130)$$

где $F(s)$ — преобразование Фурье правой части: $f(x) \Rightarrow F(s)$. Теперь введем новое (*энергетическое*) гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_e = \int_{-\infty}^{\infty} L(s) U(s) V(s) ds. \quad (1.131)$$

Стандартными методами [34] можно напрямую доказать, что данное выражение обладает всеми необходимыми свойствами скалярного произведения в гильбертовом функциональном пространстве. Таким образом, мы построили новое функциональное линейное пространство, и единственное недостающее свойство — его полнота. Для полноты

данного пространства пополним его всеми его предельными точками. Построенное таким образом пространство H_e становится стандартным гильбертовым пространством, которое является полным подпространством в $L_2(-a, a)$. Вариационное равенство (1.129), (1.130) теперь может быть переписано как

$$(u, u)_e = (f, u). \quad (1.132)$$

Изучим разрешимость нашего операторного уравнения, выписанного в форме (1.132), используя следующую оценку:

$$\begin{aligned} |(f, u)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(s) U(s) ds \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{L(s)} U(s) \frac{\bar{F}(s)}{\sqrt{L(s)}} ds \right| \\ &\leq B \left[\int_{-\infty}^{\infty} L(s) |U(s)|^2 ds \right]^{1/2} = B \|u\|_e, \\ B &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(s)|^2}{L(s)} ds \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Теперь очевидно, что линейный функционал (f, u) в правой части является ограниченным (непрерывным) в энергетическом пространстве, если постоянная B конечна. Она, несомненно, зависит от асимптотического поведения $F(s)$ и $L(s)$ на бесконечности, так как свойства этих функций обеспечивают регулярность подынтегрального выражения в постоянной B в любой конечной точке включая $s = 0$, если предположить, что постоянная $L(0)$ конечна и положительна:

$$0 < L(0) < \infty. \quad (1.134)$$

Наиболее типичное поведение символической функции $L(s)$ на бесконечности — степенное:

$$L(s) = O(|s|^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad (1.135)$$

как следует из результатов раздела 1.4 (см. формулу (1.73) в случае $S(x) \equiv x$, $\lambda = s$).

Будем различать три разных случая:

а) $0 < \alpha < 1$. Здесь константа B конечна, $B < \infty$, по крайней мере если $f(x) \in C_1[-a, a]$, так как в этом случае $F(s) = O(1/s)$ (см. уравнение (1.73)) и, таким образом,

$$\frac{|F(s)|^2}{L(s)} = O(|s|^{\alpha-2}). \quad (1.136)$$

Очевидно, выражение (1.136) интегрируемо по прямой $-\infty < s < \infty$;

б) $1 \leq \alpha < 3$. Здесь необходимое условие конечности постоянной B состоит в том, что асимптотика $F(s)$, $s \rightarrow \infty$, должна быть поряд-

как $o(1/s)$. Это значит, что два главных асимптотических слагаемых в (1.73) должны обращаться в нуль. Достаточное условие здесь состоит в том, что $f(x) \in C_2[-a, a]$ и $f(-a) = f(a) = 0$. Действительно, при таких условиях $F(s) = O(s^{-2})$ и поэтому

$$\frac{|F(s)|^2}{L(s)} = O(|s|^{\alpha-4}), \quad (1.137)$$

что вместе с $\alpha < 3$ гарантирует конечность константы B в (1.133);

в) $\alpha \geq 3$. Этот случай не имеет практического значения, поэтому мы не рассматриваем его даже при условии, что он допускает достаточно схожий анализ со случаями 2а и 2б.

Во всех этих случаях, когда $B < \infty$, функционал (f, u) непрерывен в H_e . Следовательно, согласно классической теореме Рисса [34, 44], существует единственный элемент $u_0 \in H_e$ такой, что $(f, u) = (u_0, u)_e$, и это позволяет нам выписать энергетическое соотношение (1.132) в эквивалентной форме

$$(u, u)_e = (u_0, u)_e. \quad (1.138)$$

Отсюда ясно, что во всех этих случаях интегральное уравнение первого рода имеет единственное слабое (или обобщенное, энергетическое) решение $u = u_0 \in H_e$.

Примечания

1. Конечно, наличие слабого решения не означает существование классического. Тем не менее ясно, что если существует классическое решение уравнения (1.119), оно одновременно будет и слабым решением.

2. Единственность решения гарантируется положительной определенностью символической функции $L(s)$ как в классическом, так и в слабом смысле, поскольку если есть два решения $Gu_1 = f$, $Gu_2 = f$, то из $G(u_1 - u_2) = 0$ следует (см. (1.122))

$$(G(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s) |U_1(s) - U_2(s)|^2 ds = 0, \quad (1.139)$$

следовательно, $U_1(s) \equiv U_2(s) \sim u_1(x) \equiv u_2(x)$.

3. В некотором смысле уравнения Фредгольма второго и первого рода обладают противоположными свойствами. Уравнение второго рода допускает ясную трактовку в рамках теории Фредгольма, которая в случае регулярного ядра дает условия однозначной разрешимости уравнения. Таким образом, здесь чем лучше ядро, тем лучше качественные свойства уравнения. Напротив, уравнения первого рода с регулярными ядрами, как правило, неразрешимы. Следовательно, мы сталкиваемся с парадоксальным феноменом: чем хуже ядро, тем лучше качественные свойства уравнения.

4. Наиболее интересные и важные применения в теории дифракции связаны со случаем, когда

$$L(s) = \frac{D}{|s|} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right], \quad s \rightarrow \infty. \quad (1.140)$$

К сожалению, рассмотренная здесь теория гарантирует (слабую) разрешимость уравнения только для правых частей, которые обнуляются на концах интервала: $f(\pm a) = 0$, $f(x) \in C_1[-a, a]$. Тем не менее в этом случае формулы (1.82)–(1.85) явно описывают поведение ядра следующим образом:

$$G(x) \in C[-2a, 2a] \setminus \{0\}, \quad (1.141)$$

$$G(x) \sim -D \ln |x| [1 + O(x)], \quad x \rightarrow 0, \quad (1.142)$$

т. е. мы пришли к уравнениям с ядрами логарифмического типа. Теория интегральных уравнений с подобного рода ядрами тесно связана с интегральными уравнениями типа Коши и допускает абсолютно другое и намного более глубокое исследование, основанное на краевой задаче Римана и главном значении интегралов типа Коши. Данная теория представлена в следующем разделе.

5. Заметим, что представленная теория уравнений первого рода не дает подходящего численного алгоритма решения данных уравнений.

6. Весьма интересно исследовать более детально, какова истинная структура ядра в случае 2а, когда обобщенное решение существует и единственно для произвольной гладкой правой части. Если предположить, что

$$L(s) = \frac{D}{|s|^\alpha} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right], \quad s \rightarrow \infty, \quad (1.143)$$

тогда формулы (1.82), (1.83) определяют поведение ядра

$$G(x) \sim \frac{D\Gamma(1-\alpha)}{|x|^{1-\alpha}} [1 + O(x)], \quad x \rightarrow 0, \quad (1.144)$$

которое соответствует классическим операторам Фредгольма со слабой особенностью в ядре.

1.7. Сингулярные интегральные уравнения типа Коши

Интегральные операторы вида

$$(Gu)(x) = \int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad x \in (-a, a), \quad (1.145)$$

не принадлежат к какому-либо классу из рассмотренных в предыдущих двух разделах. Если мы вычислим образ Фурье ядра (которое, разумеется, является ядром типа свертки), то получим

$$L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin sx}{x} dx = \pi \operatorname{sign}(s), \quad (1.146)$$

которое не убывает на бесконечности, т. е. при $s \rightarrow \infty$. Другая проблема состоит в том, что интеграл (1.146) не существует в классическом смысле.

Если плотность $u(x)$ — по крайней мере из класса Липшица: $u(x) \in \operatorname{Lip}[-a, a]$, т. е.

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq A |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [-a, a], \quad (1.147)$$

с определенной константой $A > 0$, тогда

$$(Gu)(x) = \int_{-a}^a \frac{u(\xi) - u(x)}{x - \xi} d\xi + u(x) \int_{-a}^a \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (1.148)$$

и мы сможем свести интеграл (1.145) к случаю с постоянной плотностью, так как первое подынтегральное выражение в (1.148) ограничено и, следовательно, определяет конечный интеграл. Следует отметить, что все результаты далее в этом разделе верны даже в более общем случае, когда $u(x)$ — из класса Гельдера H^δ с некоторой положительной степенью δ : $|u(x_1) - u(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\delta$ ($\delta > 0$).

Попробуем трактовать последний интеграл в обобщенном смысле (см. (1.54)):

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{x - \xi} &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-a}^a \frac{|x - \xi|^\alpha}{x - \xi} d\xi = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[\int_{-a}^x (x - \xi)^{\alpha-1} d\xi - \int_x^a (\xi - x)^{\alpha-1} d\xi \right] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{(x+a)^\alpha - (a-x)^\alpha}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} [(x+a)^\alpha \ln(x+a) - (a-x)^\alpha \ln(a-x)] = \\ &= \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad x \in (-a, a), \quad (1.149) \end{aligned}$$

где мы воспользовались правилом Лопиталя. Довольно часто подобные результаты совпадают с результатом, формально получаемым при

пренебрежении тем фактом, что подынтегральное выражение неинтегрируемо:

$$\int_{-a}^a \frac{d\xi}{x-\xi} = -\ln|\xi-x| \Big|_{\xi=-a}^a = \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| = \ln\frac{a+x}{a-x}, \quad x \in (-a, a). \quad (1.150)$$

О. Коши предложил для однозначной ясной трактовки подобного рода интегралов рассматривать так называемое *главное значение*.

Определение. Если предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{u(\xi) d\xi}{x-\xi} + \int_{x+\varepsilon}^a \frac{u(\xi) d\xi}{x-\xi} \right) \quad (1.151)$$

конечен, то он называется **главным значением** интеграла (1.145).

Определение интегралов типа Коши на произвольном контуре аналогично. Ключевой шаг состоит в удалении малой симметричной ε -окрестности особой точки в (1.151).

Очевидно, что если $u(x) \in \text{Lip}[-a, a]$, то главное значение (1.151) существует и совпадает с выражениями (1.149)–(1.150).

Интегралы типа Коши, которые будут здесь называться также **сингулярными интегралами**, обладают очень интересными, уникальными свойствами. Наиболее интересные свойства сингулярных интегралов: их аналитические свойства в комплексной плоскости; явное обращение характеристического сингулярного оператора; связь между теорией Фредгольма и теорией сингулярных интегральных уравнений.

Прежде всего рассмотрим произвольный замкнутый контур $\Gamma \subset D$ конечной длины в некоторой области D комплексной плоскости $z = \{\text{Re } z, \text{Im } z\}$. Тогда теория аналитических функций утверждает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} u(z), & z \text{ внутри } \Gamma, \\ 0, & z \text{ вне } \Gamma, \end{cases} \quad (1.152)$$

при условии, что функция $u(z)$ аналитична в D и контур Γ обходится против часовой стрелки. Этот результат напрямую следует из теоремы о вычетах (см. формулу (1.11)), так как $\zeta = z$ является простым полюсом подынтегрального выражения. Но что происходит на контуре $z \in \Gamma$?

Формула *Сохоцкого–Племеля* дает ответ на этот вопрос, даже если $u(\zeta)$ не аналитична, а лишь $u(\zeta) \in \text{Lip}(\Gamma)$:

$$\lim_{z \rightarrow z_0 \in \Gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \pm \frac{u(z_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}, \quad z \in \Gamma, \quad (1.153)$$

где знак плюс соответствует внутреннему пределу, знак минус — внешнему пределу, а последний интеграл трактуется как сингулярный.

Заметим, что в случае аналитичной $u(\zeta)$ последний интеграл равен нулю. Доказательство очень просто:

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) - u(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + u(z_0) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0. \quad (1.154)$$

Здесь подынтегральное выражение в первом интеграле аналитично и, следовательно, равно нулю вследствие интегральной теоремы Коши, а последний интеграл вычисляется напрямую и обращается в нуль. Таким образом, мы пришли к утверждению, что если $u(z)$ аналитична в области, содержащей замкнутый контур Γ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} u(z), & z \text{ внутри } \Gamma, \\ \frac{1}{2}u(z), & z \text{ на } \Gamma, \\ 0, & z \text{ вне } \Gamma. \end{cases} \quad (1.155)$$

Сделаем окончательный вывод: аналитические свойства интеграла типа Коши таковы, что он приводит к «скачку» каждый раз, когда точка z пересекает контур интегрирования Γ . Более того, если z проходит снаружи внутрь Γ , то скачок равен вычету в точке z , но если z на своем пути внутрь Γ изначально расположен на контуре, то скачок равен половине вычета (взятого с соответствующим знаком). Такими же свойствами обладает сингулярный интеграл по произвольному разомкнутому контуру конечной длины

$$\int_{z_A}^{z_B} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1.156)$$

т. е. он имеет при каждом пересечении точкой z контура (z_A, z_B). При этом «полный скачок» при прохождении через контур равен вычету подынтегрального выражения (с соответствующим знаком) и равен половине вычета, если точка z «останавливается» на контуре.

Однако вернемся к характеристическому сингулярному интегральному уравнению на интервале $(-a, a)$

$$\int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{x - \xi} = f(x), \quad |x| < a, \quad f(x) \in \text{Lip}[-a, a], \quad (1.157)$$

главному объекту нашего исследования. Доказано (см., например, [18]), что общее интегрируемое решение данного уравнения имеет следующий вид:

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \left[C - \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2} f(\xi)}{x - \xi} d\xi \right], \quad |x| < a, \quad (1.158)$$

где C — произвольная постоянная. Формула обращения (1.158) относится к результатам глубокой теории краевых задач Римана для аналитических функций.

Следовательно, для характеристического ядра типа Коши рассматриваемое сингулярное уравнение допускает явное точное решение в квадратурах. Но что можно сказать о разрешимости полного уравнения

$$(Gu)(x) = \int_{-a}^a \left[\frac{1}{x-\xi} + K(x, \xi) \right] u(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| < a, \quad (1.159)$$

если ядро $K(x, \xi)$ регулярно? Все результаты, приведенные ниже, справедливы, когда по крайней мере $K(x, \xi) \in C_1[(-a, a) \times (-a, a)]$ и $f(x) \in \text{Lip}[-a, a]$.

Теория сингулярных уравнений (1.159), в том числе уравнений второго рода, когда неизвестная функция $u(x)$ присутствует также вне интеграла, известна сегодня в литературе как теория Ф. Нетера [18]. В применении к уравнению, выписанному в специальной форме (1.159), она может быть представлена теоремой, которая схожа по смыслу с теоремами Фредгольма.

Рассмотрим сопряженное уравнение

$$(G^*u)(x) = \int_{-a}^a \left[\frac{1}{\xi-x} + K^*(x, \xi) \right] v(\xi) d\xi = g(x), \quad |x| < a. \quad (1.160)$$

Теория Нетера требует, чтобы сопряженное уравнение (1.160) рассматривалось в классе сопряженных функций следующим образом. Если мы ищем решение основного уравнения (1.159) в классе функций h , неограниченных на обоих концах $x = \pm a$, то сопряженное уравнение (1.160) должно рассматриваться в сопряженном классе h' функций, ограниченных на одном из двух концов $x = a$ или $x = -a$.

Введем понятие индекса χ ; в рассматриваемом случае уравнения первого рода (1.159) χ — это просто количество интервалов, где выполняется данное уравнение, т. е. здесь это значение $\chi = 1$. Тогда теория Нетера утверждает следующее (сравните с теорией Фредгольма).

Теорема (первая теорема Нетера). *Подпространство решений одно-родных уравнений*

$$Gu = 0, \quad G^*v = 0 \quad (1.161)$$

имеет конечные размерности n и n' соответственно, где $n - n' = \chi$, т. е. в нашей задаче $n - n' = 1$.

Теорема (вторая теорема Нетера). *Неоднородное уравнение*

$$Gu = f \quad (1.162)$$

*имеет решение класса h тогда и только тогда, когда $(f, v_j) = 0$ для всех решений v_j сопряженного уравнения $G^*v = 0$ в классе h' .*

Проверим справедливость данных результатов на примере характеристического уравнения (1.157). Из (1.158) следует, что в этом примере $n = 1$. В то же время здесь сопряженный оператор G^* с точностью до знака совпадает с исходным G , с тем же самым решением (1.158). Очевидно, что последнее уравнение имеет только тривиальное решение класса h' для тривиальной правой части. Таким образом, имеем $n = 1$, $n' = 0 \Rightarrow n - n' = 1$.

Объединение столь мощных математических инструментов, как обобщенная трактовка интегралов и операторов с сингулярными интегралами, может быть весьма плодотворным во многих приложениях математики, механики и математической физики. Например, дадим точное решение уравнения Винера–Хопфа (1.28) в случае рассмотренного выше ядра с образом Фурье $L(s) = 1/\sqrt{s^2 + d^2}$. Как мы видели из (1.32), (1.39), в рассматриваемом случае уравнение Винера–Хопфа в образах Фурье имеет вид

$$\frac{\Phi_+(s)}{\sqrt{d - is}} = [\sqrt{d + is}]_- F_+(s) + [\sqrt{d + is}]_- F_-(s). \quad (1.163)$$

Далее разложение функции

$$[\sqrt{d + is}]_- F_+(s) = N_+(s) + N_-(s), \quad (1.164)$$

согласно формулам Сохоцкого–Племеля [18, 37], может быть переписано следующим образом:

$$N_+(s) = \frac{1}{2}(I + S)\sqrt{d + is} F_+(s), \quad (1.165)$$

где I — единичный оператор, а S — сингулярный интегральный оператор с ядром Коши.

Тогда уравнение (1.163) преобразуется к уравнению

$$\frac{\Phi_+(s)}{\sqrt{d - is}} - N_+(s) = N_-(s) + \sqrt{d + is} F_-(s) \equiv 0 \quad (1.166)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_+(s) &= \sqrt{d - is} N_+(s) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{d - is}\sqrt{d + is} F_+(s) + \frac{1}{2}\sqrt{d - is} S [\sqrt{d + is} F_+(s)]. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Для обращения Фурье в последнем выражении могут быть использованы следующие табличные операционные соотношения [66]:

$$\begin{aligned} \sqrt{d - is} &\Leftarrow -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{-d|x|}}{|x|^{3/2}} \right)_+, \\ \sqrt{d + is} &\Leftarrow -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{-d|x|}}{|x|^{3/2}} \right)_-, \end{aligned} \quad (1.168)$$

где знак плюс означает, что носителем соответствующей функции является положительная полуось, а знак минус — что отрицательная

полуось. Разумеется, интегралы в этих формулах понимаются в обобщенном смысле (см. раздел 1.3).

Теперь возвращение к оригиналам дает (напомним, что знак $*$ означает свертку двух функций)

$$\varphi(x) = \frac{1}{8\pi} \left\langle \left(\frac{e^{-d|x|}}{|x|^{3/2}} \right)_+ * \left\{ \left(\frac{e^{-d|x|}}{|x|^{3/2}} \right)_- * f(x) \right\} + \right. \\ \left. + \left(\frac{e^{-d|x|}}{|x|^{3/2}} \right)_+ * \left\{ \text{sign}(x) \left(\frac{e^{-d|x|}}{|x|^{3/2}} \right)_- * f(x) \right\} \right\rangle. \quad (1.169)$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$g(x) \Rightarrow G(s), \quad \text{sign}(x) g(x) \Rightarrow (SG)(s), \quad (1.170)$$

которое прямо следует из теоремы о свертке и формулы (1.146) для преобразования Фурье сингулярного ядра типа Коши, изученного в настоящем разделе.

Соотношение (1.169) может быть переписано более точно:

$$\varphi(x) = \frac{1}{8\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-d(x-y)} dy}{(x-y)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{d(y-t)} f(t)}{(t-y)^{3/2}} dt + \right. \\ \left. + \int_0^x \frac{e^{-d(x-y)} dy}{(x-y)^{3/2}} \int_y^{\infty} \frac{e^{d(y-t)} f(t)}{(t-y)^{3/2}} dt - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-d(x-y)} dy}{(x-y)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{d(y-t)} f(t)}{(t-y)^{3/2}} dt + \right. \\ \left. + \int_0^x \frac{e^{-d(x-y)} dy}{(x-y)^{3/2}} \int_y^{\infty} \frac{e^{d(y-t)} f(t)}{(t-y)^{3/2}} dt \right], \quad (1.171)$$

или

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{e^{-d(x-y)} dy}{(x-y)^{3/2}} \int_y^{\infty} \frac{e^{d(y-t)} f(t)}{(t-y)^{3/2}} dt, \quad x > 0. \quad (1.172)$$

Здесь оба интеграла рассматриваются в обобщенном смысле.

Проверим, что в случае $f(x) = e^{-\beta x}$ данный результат совпадает с (1.44). Для этого вычислим весь интеграл [20], который опять-таки рассматривается в обобщенном смысле (см. раздел 1.3):

$$\int_y^{\infty} \frac{e^{d(y-t)} e^{-\beta t}}{(t-y)^{3/2}} dt = e^{-\beta y} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(d+\beta)t}}{t^{3/2}} dt = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{d+\beta} e^{-\beta y}. \quad (1.173)$$

При этом обобщенное значение следующего интеграла может быть вычислено с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{e^{-d(x-y)} e^{-\beta y}}{(x-y)^{3/2}} dy &= e^{-\beta x} \int_0^x \frac{e^{-(d-\beta)y}}{y^{3/2}} dy = \\
&= e^{-\beta x} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} e^{-(d-\beta)x} - 2(d-\beta) \int_0^x e^{-(d-\beta)y} \frac{dy}{\sqrt{y}} \right] = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{x}} e^{-dx} - 2\sqrt{\pi(d-\beta)} e^{-\beta x} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{(d-\beta)x} \right], \quad (1.174)
\end{aligned}$$

так что искомым решением будет

$$\varphi(x) = \sqrt{d+\beta} \left\{ \frac{e^{-dx}}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{d-\beta} e^{-\beta x} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{(d-\beta)x} \right] \right\}, \quad (1.175)$$

которое совпадает с (1.44).

Описанная теория сингулярных интегралов Коши дает также эффективный инструмент решения уравнений свертки с ядрами, содержащими логарифмическую особенность, которые не могут быть построены полностью методами операторов Фредгольма первого рода (см. замечание 4 в предыдущем разделе).

Прежде всего, ясно, что характеристическое уравнение

$$\int_{-a}^a \ln|x-\xi| u(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq a, \quad (1.176)$$

сводится после дифференцирования по x к уравнению (1.157), которое допускает обращение в явном виде. Неизвестная постоянная C , возникающая в процессе преобразований, может быть определена единственным образом с помощью подстановки выражения вида (1.158) (с $f'(x)$ вместо $f(x)$) в исходное уравнение (1.176) с определенным значением x , например при $x=0$. Такая процедура впервые была проделана Карлеманом [72], который нашел следующее представление для (единственного) интегрируемого решения:

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \left[\int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2} f'(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{1}{\ln(a/2)} \int_{-a}^a \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \right] \quad (1.177)$$

в случае $a \neq 2$, $f'(x) \in \operatorname{Lip}[-a, a]$. В случае $a=2$ решение имеет несколько другое представление.

Далее, при исследовании полного уравнения (первого или второго рода) с ядром логарифмического вида анализ следует стратегии, примененной для полных сингулярных уравнений с ядрами типа Коши. Можно применить точное обращение для логарифмического ядра, сводя задачу к уравнению Фредгольма второго рода, теория которого описывается теоремами Фредгольма (см. раздел 1.5).

Примечания

1. Вспомним примечание 3 из предыдущего раздела. Здесь мы также отмечаем удивительное свойство интегральных уравнений первого рода — более «плохие» ядра приводят к более широким классам решений. В этом смысле сингулярные уравнения дают даже более яркие примеры, чем ядра со слабыми особенностями (см. раздел 1.6), так как приводят не к единственному решению, а к широкому однопараметрическому классу решений с произвольной постоянной C . Таким образом, сингулярные интегральные уравнения ближе к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого рода, чем к классическим интегральным уравнениям типа Фредгольма.

2. Интересно отметить, что теория Нетера весьма похожа на теорию Фредгольма. Единственное отличие состоит в том, что размерности подпространств ядер различаются для основных и сопряженных операторов.

3. Теория Нетера остается справедливой для произвольного сингулярного интегрального уравнения второго рода, содержащего оператор типа Коши и регулярную часть ядра. Единственное отличие от описанного случая первого рода (который играет ключевую роль в дальнейшем изложении) состоит в более специфическом определении индекса χ .

Таким образом, в теории сингулярных интегральных уравнений нет существенной разницы между операторами первого и второго рода, в отличие от интегральных уравнений Фредгольма. Разрешимость задачи для операторов первого и второго рода описывается одной и той же теорией Нетера.

1.8. Гиперсингулярные интегралы и интегральные уравнения

Определение. Интеграл свертки вида

$$(Gu)(x) = \int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2} \quad (1.178)$$

называется **гиперсингулярным интегралом**.

Прежде всего нужно прояснить, в каком смысле следует понимать гиперсингулярные интегралы вида (1.178), ибо они не существуют ни как несобственные интегралы первого рода, ни как сингулярные интегралы типа Коши. Известны по крайней мере три разных определения гиперсингулярных интегралов [113].

1. Интеграл есть производная главного значения по Коши

$$\int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} = -\frac{d}{dx} \int_{-a}^a \frac{u(\xi)}{x-\xi} d\xi. \quad (1.179)$$

2. Интеграл трактуется как главное значение по Адамару [67]

$$\int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\left(\int_{-a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^a \right) \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} - \frac{2u(x)}{\varepsilon} \right]. \quad (1.180)$$

3. Интеграл трактуется в смысле обобщенных функций (см. раздел 1.3) как аналитическое продолжение интеграла

$$\int_{-a}^a |x-\xi|^\alpha u(\xi) d\xi \quad (1.181)$$

из области, где он существует в классическом смысле, до значения $\alpha = -2$.

При $u(x) \equiv 1$, три разных подхода дают один и тот же результат

$$\int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} = -\frac{d}{dx} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{x-\xi} = \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) = -\frac{2a}{a^2-x^2}, \quad (1.182)$$

$$\int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\left(-\frac{1}{a+x} + \frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{x-a} \right) - \frac{2}{\varepsilon} \right] = -\frac{2a}{a^2-x^2}, \quad (1.183)$$

$$\int_{-a}^a |x-\xi|^\alpha d\xi = \int_x^a (\xi-x)^\alpha d\xi = \frac{(a+x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(a-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (1.184)$$

при $\operatorname{Re}(\alpha) > -1$. Аналитическое продолжение (1.184) из полуплоскости $\operatorname{Re}(\alpha) > -1$ к значению $\alpha = -2$ снова дает

$$\int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -2} \left[\frac{(a+x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(a-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] = -\frac{2a}{a^2-x^2}. \quad (1.185)$$

Все три определения также эквивалентны друг другу, если плотность $u(x) \in \operatorname{Lip}[-a, a]$, так что $u'(x) \in \operatorname{Lip}^1[-a, a]$. В самом деле, пусть $\operatorname{Re}(\alpha) > -1$, тогда, следуя определению главного значения Коши для сингулярных интегралов, имеем

$$-\frac{d}{dx} \int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{x-\xi} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{d}{dx} \left(\int_{-a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^a \right) \frac{u(\xi) d\xi}{x-\xi} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\left(\int_{-a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^a \right) \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} - \frac{2u(x)}{\varepsilon} \right], \\
&\int_{-a}^a |x-\xi|^\alpha u(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^a \right) |x-\xi|^\alpha u(\xi) d\xi = \quad (1.186) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-a}^{x-\varepsilon} (x-\xi)^\alpha u(\xi) d\xi + \int_{x+\varepsilon}^a (\xi-x)^\alpha u(\xi) d\xi \right] = \\
&= \frac{d}{dx} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[- \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{(x-\xi)^{\alpha+1}}{\alpha+1} u(\xi) d\xi + \int_{x+\varepsilon}^a \frac{(\xi-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} u(\xi) d\xi \right],
\end{aligned}$$

где мы воспользовались правилом дифференцирования интегралов, содержащих внешнюю переменную как в пределе интегрирования, так и в подынтегральной функции. Теперь, применяя аналитическое продолжение к последнему соотношению, можно заметить (с помощью стандартного (ε, δ) -формализма), что правая часть приводит к (1.179). Следовательно, эквивалентность определений 1, 2 и 3 (когда все три интеграла конечны) очевидна. Докажем, что если $u(x) \in \text{Lip}^1[-a, a]$, то конечное значение пределов в выражении (1.180) существует и, следовательно, для $x \in (a, b)$ интеграл (1.178) конечен в любом смысле. Действительно, выражение в квадратных скобках в уравнении (1.180)

$$\left(\int_{-a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^a \right) \frac{u(\xi) - u(x) - u'(x)(\xi-x)}{(x-\xi)^2} d\xi - u(x) \frac{2a}{a^2 - x^2} + u'(x) \ln \frac{a-x}{a+x}, \quad (1.187)$$

которое обладает конечным пределом при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Вернемся к исследованию гиперсингулярного уравнения с характеристическим ядром

$$\int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} = f'(x), \quad |x| < a, \quad f(x) \in \text{Lip}^1[-a, a], \quad (1.188)$$

и построим его ограниченное решение с помощью соотношения (1.179) и обращения характеристического сингулярного интегрального оператора (см. раздел 1.7). Имеем по определению, что уравнение (1.188) эквивалентно

$$\frac{d}{dx} \int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{x-\xi} = -f'(x) \sim \int_{-a}^a \frac{u(\xi) d\xi}{x-\xi} = -f(x) + C_1, \quad |x| < a, \quad (1.189)$$

где C_1 — произвольная константа. Теперь формула обращения характеристического интегрального оператора Коши (см. предыдущий раздел) определяет функцию $u(x)$ в форме, содержащей другую произвольную постоянную C_2 помимо константы C_1 . Данная пара констант должна быть выбрана таким образом, чтобы обеспечить конечные значения решения на обоих концах $x = \pm a$. Это может быть сделано напрямую, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема. Если $f(x) \in \text{Lip}^1[-a, a]$, то ограниченное решение уравнения (1.188) единственно и определяется выражением

$$u(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (x - \xi)}, \quad |x| < a. \quad (1.190)$$

Можно также непосредственно проверить, что при этом

$$C_1 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}. \quad (1.191)$$

Интересно, что ограниченное решение уравнения (1.188) обращается в нуль при $x \rightarrow \pm a$.

Очевидно, что полное гиперсингулярное уравнение

$$(Gu)(x) = \int_{-a}^a \left[\frac{1}{(x - \xi)^2} + K(x, \xi) \right] u(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| < a, \quad (1.192)$$

где ядро $K(x, \xi)$ регулярно, может быть изучено после обращения его характеристической части. Исследование этой задачи схоже с исследованием полных уравнений типа Коши или уравнений логарифмического типа.

В заключительной части этого раздела мы изучим аналитические свойства гиперсингулярных интегралов

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \quad (1.193)$$

как функции комплексного аргумента z с плотностью $u(z)$, аналитичной в некоторой области D , содержащей простой замкнутый контур Γ конечной длины. Любопытно сравнить эти свойства с аналитическими свойствами сингулярного интеграла типа Коши (1.155).

Начнем со случая постоянной плотности и докажем, что интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} \equiv 0 \quad (1.194)$$

тождественно равен нулю. Когда z лежит внутри контура, этот результат несомненен, так как вычет подынтегральной части (т. е. множитель

перед первым членом в разложении ряда Лорана по отрицательным степеням $(\zeta - z)$ равен нулю. Когда z лежит вне Γ , это очевидно вследствие аналитичности подынтегральной части внутри Γ . Если $z \in \Gamma$, то первые два определения гиперсингулярных интегралов (см. выше) показывают, что он в самом деле равен нулю. Теперь для произвольной аналитической плотности имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) - u(z)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{v(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad v(\zeta) = \frac{u(\zeta) - u(z)}{\zeta - z}, \quad (1.195)$$

где $v(\zeta)$ теперь аналитична, и можно использовать соответствующие результаты из теории интегралов типа Коши. Очевидно, что $v(\zeta)|_{\zeta=z} = u'(z)$, так что формула (1.155) приводит к следующему результату:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \begin{cases} u'(z), & z \text{ внутри } \Gamma, \\ \frac{1}{2} u'(z), & z \text{ на } \Gamma, \\ 0, & z \text{ вне } \Gamma. \end{cases} \quad (1.196)$$

Примечания

1. Проверим формулу (1.196) на примере интеграла

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibs} ds}{(s-t)^2}, \quad b > 0, \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.197)$$

Так как функция e^{ibs} при $b > 0$ экспоненциально затухает в верхней полуплоскости $\text{Im}(s) > 0$, можно замкнуть контур интегрирования сверху полукругом бесконечного радиуса. Тогда значение этого интеграла, согласно (1.196), равно $I(t) = -\pi b e^{ibt}$. В то же время прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibs} ds}{s-t} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ib(s+t)} ds}{s} = \frac{d}{dt} \left[e^{ibt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibs} ds}{s} \right] = \\ &= (ib e^{ibt}) 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin(bs)}{s} ds = (ib e^{ibt})(\pi i) = -\pi b e^{ibt}, \end{aligned} \quad (1.198)$$

т. е. получаем в точности тот же результат.

2. Также заметим, что, взяв вещественную и мнимую части этого значения, легко вычислить вещественные интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bs)}{(s-t)^2} ds = -\pi|b| \cos(bt), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(bs)}{(s-t)^2} ds = -\pi|b| \sin(bt), \quad (1.199)$$

справедливые для произвольного вещественного b .

1.9. Основные уравнения волновой механики и акустики

1.9.1. Линейная гидроаэроакустика. Основные уравнения линейной акустики, по существу, представляют собой линеаризованные уравнения общей нелинейной гидродинамики и газовой динамики с малыми возмущениями скоростей.

Пусть жидкость или газ имеют в условиях покоя (при нулевой скорости $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$) постоянную плотность ρ_0 , давление p_0 распределено равномерно по объему. Тогда полное давление $p = p_0 + p'$, полная плотность $\rho = \rho_0 + \rho'$, а вектор результирующей скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Все помеченные штрихом величины малы и необходимо выполнить линеаризацию по этим малым параметрам. Тогда уравнения движения Эйлера

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \text{grad } p = 0 \quad (1.200)$$

в случае малых возмущений (линеаризованные уравнения) принимают следующий вид:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \text{grad } p' = 0. \quad (1.201)$$

Пусть жидкость баротропна. Тогда уравнение состояния $p = p(\rho) \sim \rho = \rho(p)$ в линеаризованной форме записывается в виде

$$p = p_0 + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) \sim p' = c^2 \rho', \quad (1.202)$$

где величина c , определяемая из

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}, \quad (1.203)$$

называется *волновой скоростью* в среде. Легко видеть, что размерность физического параметра c равна отношению длины к времени (например, м/с), чем и обосновано его название. Кроме того, из физических соображений ясно, что для реальной среды зависимость плотности от давления монотонно возрастает, так что $\partial p / \partial \rho > 0$, а значит, $c^2 > 0$. Следовательно, волновая скорость всегда вещественна.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.204)$$

в линеаризованной форме

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\mathbf{v}') = 0. \quad (1.205)$$

Выведем из уравнений (1.201), (1.202), (1.205) волновое уравнение (в дальнейшем штрихи опускаем). Для этого продифференцируем уравнение (1.205) по времени и далее подставим выражение $\rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t$,

взятое из уравнения (1.201), в полученное уравнение (Δ — оператор Лапласа):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} p) \sim \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (1.206)$$

Теперь из последнего уравнения и уравнения (1.202) получим *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p. \quad (1.207)$$

В случае когда волновой процесс — гармонический во времени, $p(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\{e^{-i\omega t} \tilde{p}(x, y, z)\}$, где ω — это *угловая частота*, а новая функция \tilde{p} не зависит от времени, получаем *уравнение Гельмгольца* (знак вещественной части и тильда далее опущены)

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (1.208)$$

где k называется *волновым числом*. Заметим, что в последующих рассуждениях зависящий от времени множитель $e^{-i\omega t}$ будет опускаться каждый раз при изучении гармонической задачи. В таком гармоническом случае вектор скорости может быть выражен в терминах давления через уравнение (1.201) следующим образом:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\omega\rho_0} \operatorname{grad} p. \quad (1.209)$$

Пусть $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$, — фиксированная прямоугольная система координат. В гармоническом режиме колебаний с угловой частотой ω , когда комплексная амплитуда давления (или просто *функция давления*) удовлетворяет уравнению (1.209), введем понятие **плоской волны**, под которым будем понимать решение уравнения Гельмгольца (1.208)

$$\begin{aligned} p &= f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = f(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3), \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \\ \Delta p &= (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) f'' = f'' \implies f'' + k^2 f = 0 \sim \\ &\sim f = A_1 e^{ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} + A_2 e^{-ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (1.210)$$

где \mathbf{n} — произвольный фиксированный единичный вектор в пространстве. Таким образом, полная структура решения, соответствующего плоской волне:

$$p = A_1 e^{i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + A_2 e^{-i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}, \quad (1.211)$$

где аргумент осциллирующей экспоненциальной функции называется *фазой* соответствующей волны.

Определение. Для любого момента времени t множество в трехмерном пространстве, соответствующее постоянному значению фазы, называется **волновым фронтом**. Скорость распространения волнового фронта во времени называется **фазовой скоростью**.

Покажем, что первое слагаемое в уравнении (1.211) представляет волну, уходящую в бесконечность, а второе — волну, приходящую

из бесконечности. В самом деле, волновой фронт обоих слагаемых является множеством, где

$$k \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t = \text{const} \sim \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \text{const} \pm ct, \quad (1.212)$$

так как $\omega/k = c$. Из аналитической геометрии известно, что если вектор единичного направления $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, то уравнение $x_1 \cos \alpha + x_2 \cos \beta + x_3 \cos \gamma - q = 0$ определяет плоскость с нормалью \mathbf{n} и расстоянием от начала координат, равным q . В нашем случае $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ и расстояние от начала равно $q(t) = \text{const} \pm ct$. Таким образом, волновой фронт представляет собой плоскость, что оправдывает название волны, а направление \mathbf{n} определяет единичную нормаль к такому плоскому фронту. Более того, скорость распространения фронта волны равна

$$\dot{q}(t) = \pm c. \quad (1.213)$$

Неслучайно она совпадает с волновой скоростью в среде. Теперь ясно, что верхний знак соответствует волне, уходящей от начала координат в бесконечность, а нижний — волне, приходящей из бесконечности. Отдельное исследование в главе 3 будет посвящено важному вопросу о физическом и математическом смысле этих двух типов волн и в чем разница между ними. Здесь лишь заметим, что по всему тексту книги дифрагированные (отраженные, рассеянные) волны должны удовлетворять так называемому *условию излучения*. Более строго это понятие будет изучено ниже, а в простейшем, наглядном смысле условие излучения гласит: среди полного набора возможных решений дифракционных задач физически реализуемы только рассеянные волны, уходящие в бесконечность, а волны, приходящие из бесконечности, фиктивны. Таким образом, из двух плоских волн в уравнении (1.211) лишь первая удовлетворяет условию излучения.

Длина волны λ определяется как минимальное расстояние в направлении \mathbf{n} , для которого фазы колебаний (т.е. аргументы показательных функций в (1.211)) совпадают в точках, определенных радиус-векторами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + \lambda \mathbf{n}$. Это дает $\lambda k = 2\pi$, или

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}, \quad \omega = 2\pi f. \quad (1.214)$$

где ω — угловая частота, которая измеряется в радианах за секунду, а f называется *циклической частотой* и измеряется в герцах ($1 \text{ Гц} = 1/\text{с}$).

В задачах дифракции, где приходящая волна падает на препятствие, полная математическая формулировка подразумевает некоторые граничные условия на граничной поверхности (трехмерный случай) или граничной кривой (двумерный случай) препятствия. Существует два основных типа граничных условий: 1) акустически твердая граница и 2) акустически мягкая граница. В первом случае частицы среды не могут проникать сквозь границу, так что нормальная компонен-

та скорости равна нулю $v_n = 0$. Тогда при помощи формулы (1.209) получаем

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (1.215)$$

Во втором случае предполагается, что полное давление на границе равно нулю

$$p|_S = 0. \quad (1.216)$$

1.9.2. Электромагнитная волновая теория. Здесь основные уравнения для изотропной среды даются системой уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\sigma \mathbf{E}}{c} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (1.217)$$

где \mathbf{E} — интенсивность электрического поля; \mathbf{H} — интенсивность магнитного поля; ε, μ, σ — некоторые положительные постоянные физические параметры, а c — волновая скорость.

Если применить оператор rot к первому уравнению (1.217) и исключить напряженность магнитного поля, то приходим к следующему уравнению относительно \mathbf{E} :

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.218)$$

где учтено, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$, а также принято дополнительное условие $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$.

Если волновой процесс гармонический с обычным множителем $e^{-i\omega t}$, зависящим от времени, то уравнение (1.218) становится дифференциальным уравнением Гельмгольца в частных производных

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}} \quad (\operatorname{Re} k > 0, \operatorname{Im} k \geq 0), \quad (1.219)$$

с некоторым в общем случае комплексным волновым числом k , которое в вакууме ($\sigma = 0$) становится вещественным: $k = (\omega/c) \sqrt{\mu \varepsilon}$. Напряженность магнитного поля \mathbf{H} выражается через \mathbf{E} следующим образом:

$$\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (1.220)$$

Граничные условия для уравнения (1.219) обычно соответствуют поверхности идеального проводника S , где касательная компонента \mathbf{E} обращается в нуль:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_S = 0. \quad (1.221)$$

1.9.3. Линейная динамическая теория упругости. Если линейная изотропная упругая среда занимает некоторую область в трехмерном пространстве, то каждой точке среды соответствует три компоненты вектора смещения $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ и шесть компонент тензора напряжений. Последний может быть представлен как симметричная матрица $\{\sigma_{ij}\}$ размера 3×3 ($i, j = 1, 2, 3$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), при этом компо-

нента тензора σ_{ij} определяет j -ю компоненту напряжения, возникающего на малой площадке элемента, проходящего через данную точку и обладающего внешней нормалью, параллельной x_i .

Для линейной изотропной упругой среды уравнения состояния записываются в виде

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (1.222)$$

(закон Гука), а уравнения движения — в виде

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.223)$$

где μ и λ — модули упругости Ламе, ρ — массовая плотность материала.

Доказывается, что в отличие от гидроаэроакустики и электромагнетизма, где физически возможна единственная волновая скорость c , в динамической теории упругости можно ввести две независимые упругие волновые скорости

$$c_p^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (1.224)$$

Первая называется *продольной*, вторая — *поперечной* волновой скоростью.

Тогда согласно классическим результатам (см., например, [59]) следующее представление потенциала через потенциалы Ламе определяет общее решение системы (1.223)

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi} \quad (\text{div } \boldsymbol{\psi} = 0), \quad (1.225)$$

где φ и $\boldsymbol{\psi}$ — продольный скалярный и поперечный векторный потенциалы соответственно, которые удовлетворяют следующим волновым уравнениям:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}. \quad (1.226)$$

Как обычно, в случае гармонических процессов с временным множителем $e^{-i\omega t}$ волновые уравнения (1.226) становятся уравнениями Гельмгольца

$$\Delta \varphi + k_p^2 \varphi = 0, \quad \Delta \boldsymbol{\psi} + k_s^2 \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, \quad (1.227)$$

с двумя разными волновыми числами

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad \text{и} \quad k_s = \frac{\omega}{c_s}.$$

Наиболее типичные в теории дифракции граничные условия для упругих волн соответствуют случаю граничной поверхности, свободной от нагрузки. Отсутствие нагрузки подразумевает нулевые компоненты вектора напряжения на граничной поверхности S . Так как вектор напряжения на элементарной площадке выражается в терминах компо-

нент тензора напряжений, приходим к условию

$$P_i|_S = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.228)$$

Данное условие может быть сформулировано в терминах потенциалов Ламе с помощью соотношений (1.222) и (1.225).

Примечания

1. Интересно, что основные определяющие уравнения всех трех теорий, описывающих совершенно разные по своей физической природе явления, одинаковы — это волновые уравнения или (в монохроматическом режиме) уравнения Гельмгольца. Разница в том, что в акустике волновое уравнение — скалярное, и вся теория может быть сформулирована в терминах скалярной функции давления. В электромагнитной теории главные уравнения — векторные, но все компоненты векторных полей описываются одним волновым уравнением с одной и той же волновой скоростью. Основные уравнения динамической теории упругости имеют тензорный вид, и в общем случае они описываются парой волновых уравнений с двумя различными волновыми скоростями.

2. Математическое средство волновых процессов в столь разных физических средах объясняет, почему они обычно изучаются как разделы единой теории. Оно проявляется даже во взаимном влиянии терминологии, эвристических идей и т. д. Так, в гидроакустике и волновой теории упругости широко распространено представление о зонах *света* и *тени* в геометрической теории дифракции, хотя физически там нет ни световых лучей, ни каких-либо элементов, дающих тень. Кроме того, гармонические процессы в скалярной и упругой теориях часто называются *монохроматическими* (в переводе с греческого — *одноцветные*). Терминология, несомненно, порождена электромагнитной теорией, так как электромагнитная волна одной фиксированной частоты приводит к определенному цвету радуги. Подобные примеры внутреннего средства встречаются при решении различных задач.

3. Для многих приложений достаточно изучения так называемой *плоской* (двумерной) задачи в декартовой системе координат (x, y) . В скалярной акустике ее решение определяется как решение волнового уравнения, которое ищется (если оно существует) в форме $p = p(x, y, t)$ в нестационарном случае и как $p = p(x, y)$ — в гармоническом. Тогда соответствующее волновое уравнение и уравнение Гельмгольца принимают вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0 \quad (k = \omega/c). \quad (1.229)$$

В электромагнетизме плоская волна может быть разделена на два независимых волновых поля (*E-поляризованное* и *H-поляризованное*). Выпишем соответствующие основные уравнения только для гармони-

ческого случая. Первому типу поляризации соответствует

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \{0, 0, E(x, y)\}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 E = 0, \\ \mathbf{H}(x, y) &= \{H_x, H_y, 0\}, \quad H_x = \frac{c}{i\omega\mu} \frac{\partial E}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{c}{i\omega\mu} \frac{\partial E}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.230)$$

Второй тип поляризации описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{0, 0, H(x, y)\}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k^2 H = 0, \\ \mathbf{E}(x, y) &= \{E_x, E_y, 0\}, \quad E_x = -\frac{c}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad E_y = \frac{c}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.231)$$

В плоской задаче динамической теории упругости подразумевается, что вектор смещения имеет лишь первые две ненулевые компоненты из трех, причем обе они зависят только от (x, y) . Можно доказать, что в этом случае векторный потенциал Ламе ψ может считаться скалярным, у него нетривиальна лишь третья компонента, зависящая от (x, y) , что автоматически обеспечивает справедливость условия в скобках в (1.225). Полная система основных уравнений здесь такова:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u(x, y), v(x, y), 0\}, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = \varphi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_p^2 \varphi &= 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_s^2 \psi = 0. \end{aligned} \quad (1.232)$$

Компоненты тензора напряжений могут быть найдены из закона Гука (1.222).

4. В динамической теории упругости рассматривается так называемый *антиплоский*, или *SH*-волновой, процесс. Это тот случай, когда задача может быть сведена к одному скалярному уравнению только с (поперечным) волновым числом k_s . Данный случай характерен тем, что волна поляризуется в z -направлении, но распространяется в плоскости (x, y) . Математически это описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{0, 0, w(x, y)\}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_s^2 w = 0, \\ \sigma_{xz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.233)$$

с нулевыми остальными компонентами тензора напряжений.

5. Вследствие вышеупомянутого сродства волновых процессов в трех классах задач мы в последующем изложении будем оперировать, как правило, скалярными акустическими волновыми полями. Мы также будем рассматривать некоторые упругие волновые задачи для демонстрации того, что разработанные методы эффективны также и в наиболее сложном тензорном (упругом) случае.

ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ ПРЕПЯТСТВИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

2.1. Свойства потенциалов простого и двойного слоя

Как было отмечено в первой главе, основной объект наших исследований — гармонические волновые процессы в скалярной среде, и мы будем иметь дело в основном со скалярным дифференциальным уравнением Гельмгольца в частных производных

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (2.1)$$

где ω представляет собой угловую частоту, c — скорость волны, k — волновое число. Это уравнение решается в произвольной трехмерной области D , ограниченной простой поверхностью S . В случае двумерной задачи мы изучаем уравнение (2.1) в некоторой плоской области D с простой граничной кривой l . В разделе 1.9 было отмечено, что существует два основных, стандартных типа граничных условий — акустически жесткая граница

$$v_n|_S = 0 \sim \frac{\partial p}{\partial n}|_S = 0 \quad (2.2)$$

и акустически мягкая граница

$$p|_S = 0. \quad (2.3)$$

Определение. *Фундаментальным решением* (или *функцией Грина*) называется решение $\Phi(r)$ уравнения Гельмгольца, которое зависит только от расстояния r между началом координат и текущей точкой.

Для построения функции Грина рассмотрим двумерный и трехмерный случаи отдельно.

2.1.1. Трехмерный случай. Оператор Лапласа в сферической системе координат (r, φ, θ) представляется в виде

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.4)$$

Следовательно, в случае когда отличны от нуля лишь производные по координате r , функция Грина может быть получена из уравнения

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + k^2 \right] \Phi(r) = 0. \quad (2.5)$$

Очевидно, что данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) + k^2(r\Phi) = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами для функции $r\Phi(r)$. Его точное аналитическое решение можно получить, построив характеристический многочлен [46]: $r\Phi = Ae^{\pm ikr}$ с некоторой константой A , так что общее решение выражается в виде

$$\Phi(r) = A_1 \frac{e^{ikr}}{r} + A_2 \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.7)$$

2.1.2. Двумерный случай. Здесь уравнение Гельмгольца (2.1) также сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, однако с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + k^2\Phi = 0. \quad (2.8)$$

Это уравнение Бесселя [1], и его общее решение представимо в виде

$$\Phi(r) = A_1 J_0(kr) + A_2 Y_0(kr), \quad (2.9)$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка (также называемые функциями Бесселя и Неймана соответственно).

В этой главе мы рассмотрим только дифракцию на конечных препятствиях, занимающих область D и находящихся в неограниченной акустической среде, т.е. только внешние задачи. Для правильного выбора единственного решения необходимо применить соответствующие условия на бесконечности, которыми являются условия излучения (см. раздел 1.9).

Напомним, что полная структура полученного решения (2.7) как функция пространственной координаты r и времени выглядит следующим образом:

$$\Phi(r, t) = A_1 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} + A_2 \frac{e^{-i(kr + \omega t)}}{r}. \quad (2.10)$$

По аналогии с изложенным в разделе 1.9 ясно, что волновой фронт, соответствующий данным двум волнам, задается как $kr \mp \omega t = \text{const}$ для любого выбранного момента времени t , т.е. $r = \pm(\omega/k)t + \text{const} = \pm ct + \text{const}$. Таким образом, видно, что функция Грина представляет собой *сферическую* волну, поскольку для любого фиксированного t полученное уравнение волнового фронта описывает сферическую поверхность. Фазовая скорость равна $\dot{r} = \pm c$, т.е. она снова совпадает со скоростью волны в среде. В рассматриваемом трехмерном случае

только первый член в (2.10) удовлетворяет условию излучения, что определяет следующую форму функции Грина:

$$\Phi(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (2.11)$$

где гармоническая (по времени) часть $\exp(-i\omega t)$ опущена, а константу A , как будет ясно из последующих рассуждений, удобно взять равной $1/(4\pi)$. Необходимо подчеркнуть, что функция Грина (2.11) аналитическая и удовлетворяет уравнению Гельмгольца только вне малой окрестности начала координат.

Для того чтобы сделать правильный выбор между двумя функциями в двумерном случае, приведем асимптотические выражения для функций Бесселя в дальней зоне [1]:

$$\begin{aligned} J_0(kr) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) + O(r^{-3/2}), \\ Y_0(kr) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) + O(r^{-3/2}), \end{aligned} \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Отсюда понятно, что единственной линейной комбинацией данных функций, которая формирует волну, распространяющуюся от источника в бесконечность в соответствии с условием излучения, будет

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= A [J_0(kr) + iY_0(kr)] = AH_0^{(1)}(kr) \sim \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left[i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right] + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь выражение в первых квадратных скобках называется функцией Ханкеля первого рода нулевого порядка [1]. Только из соображений удобства мы задаем константу A и определяем двумерную функцию Грина в форме

$$\Phi(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr). \quad (2.14)$$

Заметим, что функция Грина (2.14) двумерной теории, как и в трехмерном случае, также обладает особенностью в нуле.

Определение. Интеграл

$$(G_s u)(x) = \int_{\partial D} \Phi(|x - y|) u(y) ds_y, \quad (2.15)$$

взятый по границе ∂D области D , называется **потенциалом простого слоя**.

Здесь $|x - y|$ — расстояние между точками $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 или между точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ в двумерном пространстве \mathbb{R}^2 . Индекс при y указывает на то, что интегрирование ведется по y .

Из уравнений (2.11), (2.14) и свойств функции Ханкеля для малого аргумента [1] ясно, что

$$H_0^{(1)}(kr) \sim \frac{2i}{\pi} [\ln(kr) + \gamma - \ln 2] + 1 + O((kr)^2 \ln(kr)), \quad (kr) \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

где γ — постоянная Эйлера. Таким образом, интегральный оператор G_s в (2.15) имеет слабосингулярное ядро (см. раздел 1.5). Следовательно, G_s — компактный оператор в банаховом пространстве непрерывных функций $u(y) \in C(\partial D)$. Для дальнейших рассуждений предположим также, что граница ∂D — кусочно-гладкая.

Теорема 1. Если плотность $u(y) \in C(\partial D)$, то потенциал простого слоя (2.15) есть функция, непрерывная в \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2).

Доказательство. Приведем здесь доказательство только для трехмерного случая, так как двумерный случай может быть изучен по аналогии. Так как ядро интегрального оператора (2.15) является непрерывным для любых $x, y \in \mathbb{R}^3$, исключая малую окрестность источника (при $|x - y| \rightarrow 0$), очевидно, что интеграл (2.15) — наверняка непрерывная функция x вдали от границы $S = \partial D$. Теперь положим $x \in S$ и покажем, что невязка $|(G_s u)(x') - (G_s u)(x)|$ может быть сделана сколь угодно малой, если разница $|x' - x|$ достаточно мала.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольный малый параметр и $\delta = a\varepsilon^3$ ($a > 0$). Обозначим часть поверхности S , представляющую малую окрестность точки x с радиусом $r_\varepsilon = b\varepsilon$ ($b > 0$), через S_ε . Постоянные a и b не зависят от ε . Оставшейся частью поверхности S является $S \setminus S_\varepsilon$. Теперь предположим, что $|x' - x| \leq \delta$, и вычислим следующую разность:

$$|(G_s u)(x') - (G_s u)(x)| \leq M \left(\int_{S_\varepsilon} + \int_{S \setminus S_\varepsilon} \right) |\Phi(|x' - y|) - \Phi(|x - y|)| ds_y, \\ M = \max_{y \in S} |u(y)|. \quad (2.17)$$

Первый интеграл

$$\int_{S_\varepsilon} |\Phi(|x' - y|) - \Phi(|x - y|)| ds_y \leq \int_{S_\varepsilon} |\Phi(|x' - y|)| + |\Phi(|x - y|)| ds_y = \\ = \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{|x' - y|} \right) ds_y \leq 2 \int_{S_\varepsilon} \frac{ds_y}{|x - y|} = \int_0^{r_\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\psi}{\rho} = 2\pi r_\varepsilon = 2\pi b\varepsilon, \quad (2.18)$$

где ψ — полярный угол точки y в полярной системе координат, расположенной в касательной плоскости с центром x . Здесь мы учли тот факт, что если точка x' приближается к x по нормали, то $|x' - y| \geq |x - y|$.

Второй интеграл в (2.17) может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \int_{S \setminus S_\varepsilon} |\Phi(|x' - y|) - \Phi(|x - y|)| ds_y = \\
 & = \int_{S \setminus S_\varepsilon} \left| \frac{e^{ik|x-y|} - e^{ik|x'-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{ik|x'-y|} (|x' - y| - |x - y|)}{|x-y| |x' - y|} \right| ds_y \leq \\
 & \leq \int_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{|e^{ik|x-y|} - e^{ik|x'-y|}|}{|x-y|} ds_y + \int_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{||x-y| - |x'-y||}{|x-y| |x'-y|} ds_y. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned}
 |e^{ik|x-y|} - e^{ik|x'-y|}| &= 2 \left| \sin k \frac{|x-y| - |x'-y|}{2} \right| \leq \\
 &\leq k ||x-y| - |x'-y||, \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

то (2.19) сводится к неравенству

$$\begin{aligned}
 & \int_{S \setminus S_\varepsilon} |\Phi(|x' - y|) - \Phi(|x - y|)| ds_y \leq \\
 & \leq \int_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{||x-y| - |x'-y||}{|x-y|} \left(k + \frac{1}{|x'-y|} \right) ds_y. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Последний шаг — использование неравенства, вытекающего из геометрии треугольников: $|\bar{z}_1 - \bar{z}_2| \geq ||\bar{z}_1| - |\bar{z}_2||$, которое в нашем случае может быть использовано в виде $||x-y| - |x'-y|| \leq |x-x'|$, откуда

$$\begin{aligned}
 & \int_{S \setminus S_\varepsilon} |\Phi(|x' - y|) - \Phi(|x - y|)| ds_y \leq \\
 & \leq |x-x'| \int_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} \left(k + \frac{1}{|x'-y|} \right) ds_y \leq \\
 & \leq (1+kL) |x-x'| \int_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{ds_y}{|x-y| |x'-y|} \leq \\
 & \leq \frac{(1+kL)\delta}{r_\varepsilon^2} S^* = \frac{(1+kL)aS^*\varepsilon}{b^2}, \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

так как для $y \in S \setminus S_\varepsilon$ имеем $|x-y| \geq r_\varepsilon$, $|x'-y| \geq r_\varepsilon$ (напомним, что x' расположена на нормали к поверхности). В формуле (2.22) S^* — площадь поверхности S , L — ее максимальный диаметр.

Собирая вместе соотношения (2.17), (2.18), (2.22), а также полагая $a = 1/(32(1 + kL)\pi^2 M^3 S^*)$ и $b = 1/(4\pi M)$, приходим к окончательной оценке: для произвольного малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \varepsilon^3/(32(1 + kL)\pi^2 M^3 S^*)$ такое, что

$$|(G_s u)(x') - (G_s u)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (2.23)$$

для всех $|x' - x| \leq \delta$. Действительно, это совпадает с определением непрерывности функции, что и требовалось доказать.

Последний интеграл был оценен по плоскому малому диску радиуса r_ε вместо соответствующей неплюской малой области S_ε , что одно и то же, потому что малые величины порядка $O(\varepsilon^2)$ отбрасываются.

Заметим, что представленное доказательство справедливо только для x , лежащего на гладкой части поверхности S . Если x попадает на край или на любую другую острую часть кусочной поверхности, доказательство будет похожим, но с незначительными изменениями.

Определение. Пусть \mathbf{n}_y ($y \in \partial D$) обозначает внешнюю единичную нормаль. Тогда интеграл

$$(G_d u)(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} u(y) ds_y \quad (2.24)$$

называется **потенциалом двойного слоя**.

По тем же причинам, что и для потенциала простого слоя, этот интеграл — непрерывный вне окрестности границы ∂D . Следующая теорема утверждает, что он претерпевает скачок при переходе через границу ∂D .

Теорема 2. Если $u(y) \in C(\partial D)$, то при $x \rightarrow y_0 \in \partial D$ потенциал двойного слоя (2.24) может быть непрерывно продолжен как с наружной, так и с внутренней стороны границы ∂D , с предельными значениями, равными соответственно

$$(G_d u)_\pm(y_0) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} u(y) ds_y \pm \frac{u(y_0)}{2}. \quad (2.25)$$

Доказательство. Для большей определенности проведем доказательство для двумерной задачи с границей $l = \partial D$ и пределом $x \rightarrow y_0 \in l$ снаружи контура. Остальные случаи доказываются аналогично.

Представим интеграл (2.24) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (G_d u)(x) = & \int_l \left[\frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \frac{\partial \Phi_0(|x - y|)}{\partial n_y} \right] u(y) dl_y + \\ & + \int_l \frac{\partial \Phi_0(|x - y|)}{\partial n_y} [u(y) - u(x)] dl_y + u(x) \int_l \frac{\partial \Phi_0(|x - y|)}{\partial n_y} dl_y, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\Phi_0 = \Phi|_{k=0} = -(1/2\pi) \ln|x-y|$ — низкочастотная функция Грина такая, что $(\Phi - \Phi_0) \in C_1(\mathbb{R}^2)$ (см. соотношение (2.16)). Легко показать, что первые два интеграла непрерывны в \mathbb{R}^2 , поэтому сосредоточимся на третьем слагаемом.

Рассмотрим две функции

$$u_1(y) \equiv 1, \quad u_2(y) = \Phi_0(|x-y|). \quad (2.27)$$

Очевидно, что $\Phi_0(|x-y|)$ как функция аргумента y удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_y \Phi_0(|x-y|) = 0$ во всей области \mathbb{R}^2 , за исключением малой окрестности точки x . Следовательно, если x лежит вне l , то обе функции $u_1(y)$ и $u_2(y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа внутри l . Тогда, используя формулу Грина, мы можем последовательно выписать:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D [u_1(y) \Delta_y u_2(y) - u_2(y) \Delta_y u_1(y)] dy_1 dy_2 = \\ &= \int_l \left[u_1(y) \frac{\partial u_2(y)}{\partial n_y} - u_2(y) \frac{\partial u_1(y)}{\partial n_y} \right] dl_y = \int_l \frac{\partial \Phi_0(|x-y|)}{\partial n_y} dl_y \sim \\ &\sim \int_l \frac{\partial \Phi_0(|x-y|)}{\partial n_y} dl_y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \quad (2.28) \end{aligned}$$

следовательно, внешний предел здесь

$$\lim_{x \rightarrow y_0 \in l} \int_l \frac{\partial \Phi_0(|x-y|)}{\partial n_y} dl_y = 0. \quad (2.29)$$

Таким образом, предельное значение для всего выражения (2.26) вычисляется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y_0 \in l} (G_d u)(x) &= \int_l \left[\frac{\partial \Phi(|y_0-y|)}{\partial n_y} - \frac{\partial \Phi_0(|y_0-y|)}{\partial n_y} \right] u(y) dl_y + \\ &+ \int_l \frac{\partial \Phi_0(|y_0-y|)}{\partial n_y} [u(y) - u(y_0)] dl_y = \\ &= \int_l \frac{\partial \Phi(|y_0-y|)}{\partial n_y} u(y) dl_y - u(y_0) \int_l \frac{\partial \Phi_0(|y_0-y|)}{\partial n_y} dl_y. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить последний интеграл, снова воспользуемся формулой Грина для тех же (вышеупомянутых) двух функций $u_1(y) \equiv 1$ и $\Phi_0(|y_0-y|)$ и применим ее по области \bar{D} , содержащейся между контуром l и полуокружностью $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ большого радиуса R , диаметр которой Γ_1 касателен к l в точке y_0 таким образом, что y_0 находится в центре полуокружности (рис. 2.1).

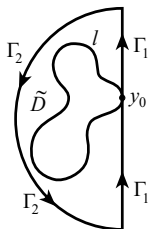


Рис. 2.1. Контур $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ касателен к граничной кривой l

Можно легко доказать, что несмотря на сингулярность функции $\Phi_0(|y_0 - y|)$, рассматриваемой как функция аргумента y вблизи точки y_0 , применение формулы Грина корректно по двум причинам. Во-первых, покажем что интеграл

$$I = \iint_{D_\varepsilon} \Delta_y \Phi_0(|y_0 - y|) dy_1 dy_2 \quad (2.31)$$

в малой окрестности (радиуса $\varepsilon > 0$) данной сингулярной точки мал при $\varepsilon \rightarrow 0$ и далее интеграл по области \tilde{D} конечен. В самом деле, если контур l имеет определенный радиус кривизны ρ в точке y_0 , то простые наблюдения вместе с некоторыми классическими результатами дифференциальной геометрии показывают, что часть данной ε -окрестности, принадлежащей области \tilde{D} , имеет площадь $\varepsilon^3/(6\rho^2) + O(\varepsilon^5)$. Но сингулярность величины $\Delta_y \Phi_0(|y_0 - y|)$ — порядка $O(1/\varepsilon^2)$, так что интеграл по этой малой области D_ε имеет порядок $O(\varepsilon)$, который несомненно мал.

Во-вторых, докажем что $\partial \Phi_0(|y_0 - y|)/\partial n_y = O(1)$ в малой окрестности y_0 как по Γ_1 , так и по l . В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} &= (\mathbf{n}_y, \text{grad}_y \Phi_0), \quad y = (y_1, y_2), \quad y_0 = (y_{01}, y_{02}), \\ \text{grad}_y \Phi_0(|y_0 - y|) &= -\frac{1}{2\pi|y_0 - y|} \left\{ \frac{y_1 - y_{01}}{|y_0 - y|}, \frac{y_2 - y_{02}}{|y_0 - y|} \right\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

поэтому

$$(\mathbf{n}_y, \text{grad}_y \Phi_0) = -\frac{(\mathbf{n}_y, y - y_0)}{2\pi|y_0 - y|^2}, \quad y, y_0 \in l, \Gamma_1.$$

Ясно, что если $y, y_0 \in \Gamma_1$, то $(\mathbf{n}_y, y - y_0) = 0$, так как эти два вектора ортогональны друг другу. Если $y, y_0 \in l$, то

$$(\mathbf{n}_y, y - y_0) = |y - y_0| \cos(\mathbf{n}_y, y - y_0) = -|y - y_0| \left[\frac{|y - y_0|}{2\rho} + O(|y - y_0|^2) \right], \quad (2.33)$$

где ρ — радиус кривизны контура l в точке y_0 . Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi\rho} + O(|y - y_0|), \quad y, y_0 \in l, \quad (2.34)$$

т. е. оба интеграла вдоль границ l и Γ конечны, так как в них подынтегральные функции непрерывны и ограничены.

Далее применение формулы Грина в области \tilde{D} дает

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} - \int_l \right) \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y &= 0 \sim \\ &\sim \int_l \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y = \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} \right) \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь первый интеграл по Γ_1 равен нулю, так как $\mathbf{n}_y \perp (y_0 - y)$. Второй интеграл

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial R} (\ln R) R d\varphi = -\frac{1}{2}. \quad (2.36)$$

Из (2.30), (2.36) окончательно следует, что

$$\lim_{x \rightarrow y_0 \in l} (G_d u)(x) = \int_l \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} u(y) dl_y + \frac{u(y_0)}{2}. \quad (2.37)$$

В заключительной части раздела приведем без доказательства два результата, имеющих отношение к нормальным производным потенциалов простого и двойного слоя (см., например, [26]).

Теорема 3. Если $u(y) \in C(\partial D)$, то при $x \rightarrow y_0 \in \partial D$ предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя определяется следующим образом:

$$\left[\frac{\partial (G_s u)(x)}{\partial n_x} \right]_{x=y_0}^\pm = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_{y_0}} u(y) ds_y \mp \frac{u(y_0)}{2}. \quad (2.38)$$

Теорема 4. Если $u(y) \in C(\partial D)$, то при $x \rightarrow y_0 \in \partial D$ нормальная производная потенциала двойного слоя представляет собой функцию, непрерывную на \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2):

$$\left[\frac{\partial (G_s u)(x)}{\partial n_x} \right]_{x=y_0}^+ = \left[\frac{\partial (G_s u)(x)}{\partial n_x} \right]_{x=y_0}^-. \quad (2.39)$$

Примечания

1. Теорема 2 утверждает, что потенциал двойного слоя (2.24) непрерывен вплоть до граничной линии l как снаружи, так и изнутри. Ключ-

чевой характеристикой двух предельных граничных значений $(G_d u)_\pm$ является то, что они отличны и скачок на граничной линии равен значению плотности в граничной точке $u(y_0)$. В этом смысле свойства потенциала двойного слоя родственны свойствам сингулярного интеграла типа Коши.

2. Теорема 2 была доказана выше для случая, когда $y_0 \in l$ лежит на гладкой части кусочно-гладкой граничной линии. Если y_0 подходит к угловой точке контура с внутренним углом α , то слагаемое $u(y_0)/2$ в теореме 2 должно быть заменено на $\alpha u(y_0)/(2\pi)$. При этом теорема 1 остается без изменений.

3. Ядро интегрального оператора (2.25) кусочно-непрерывно для кусочно-гладкого контура, так как вследствие (2.34) имеем

$$\frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} \sim \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} \sim -\frac{1}{4\pi\rho} + O(|y - y_0|), \quad y \rightarrow y_0 \quad (y, y_0 \in l). \quad (2.40)$$

4. Более детальное и более формальное изложение современной теории потенциала с приложением к дифракционным задачам можно найти в книге [26].

5. Физики предпочитают альтернативное определение функции Грина в виде решения уравнения

$$\Delta_y \Phi + k^2 \Phi = -\delta(y - x), \quad (2.41)$$

где присутствие дельта-функции Дирака означает, что в точке x сосредоточен точечный источник. Тем не менее, используя свойства преобразования Фурье (1.3) и дельта-функции (1.62), можно напрямую доказать, что подобный подход ведет к тем же представлениям (2.11) и (2.14) с $r = |x - y|$.

2.2. Основное интегральное уравнение теории дифракции

Изучим внешнюю краевую задачу для уравнения Гельмгольца в скалярном случае

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (2.42)$$

которое имеет место для акустического давления $u(y)$ вне простой замкнутой кусочно-гладкой границы конечной меры (рис. 2.2).

Теорема. Пусть $x \in \mathbb{R}^n \setminus D$ ($n = 2, 3$). Если $u(y)$ — решение уравнения (2.42), удовлетворяющее условию излучения, то справедлива интегральная формула Кирхгофа–Гельмгольца

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] ds_y. \quad (2.43)$$

(Здесь \mathbf{n}_y — внешняя нормаль к области D .)

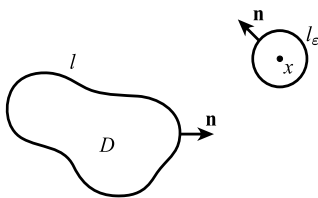


Рис. 2.2. Граничный контур l и малая ε -окрестность рассматриваемой точки x

Доказательство. Для определенности дадим доказательство в двумерном случае, так как трехмерный случай изучается достаточно схожим образом.

Рассмотрим область \tilde{D} , содержащуюся внутри круга D_R бесконечно большого радиуса R , из которой удалены область D и ε -окрестность D_ε точки x (см. рис. 2.2). Тогда обе функции $u(y)$ и $\Phi(|x - y|)$, далее рассматриваемые как функции аргумента y , удовлетворяют уравнению Гельмгольца в \tilde{D} . Следовательно, применение формулы Грина к данной паре функций приводит к следующей последовательности соотношений ($\partial\tilde{D} = l \cup l_R \cup l_\varepsilon$):

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\tilde{D}} [u(y)\Delta_y\Phi(|x - y|) - \Phi(|x - y|)\Delta_y u(y)] dy_1 dy_2 = \\ &= \int_{\partial\tilde{D}} \left[u(y) \frac{\partial\Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dl_y, \quad (2.44) \end{aligned}$$

где \mathbf{n}_y направлена вовне от \tilde{D} .

Прежде всего докажем, что так как обе функции $u(y)$ и $\Phi(|x - y|)$ удовлетворяют условию излучения на бесконечности, то интеграл вдоль окружности l_R в дальней зоне стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Действительно, все функции, удовлетворяющие условию излучения в неограниченной акустической среде, в дальней зоне обладают асимптотикой вида

$$u(y) \sim u_0(\varphi) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}}, \quad \Phi(|x - y|) = \Phi^*(x, \varphi) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}}, \quad R \rightarrow \infty, \quad (2.45)$$

где $y = (R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ — полярные координаты точки y . Данный факт может быть доказан напрямую для произвольной функции, удовлетворяющей условиям излучения, но здесь продемонстрируем это только для функции Грина.

В прямоугольной системе координат положим $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
|x - y| &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = \sqrt{|y|^2 - 2(y, x) + |x|^2} = \\
&= |y| - \frac{(y, x)}{|y|} + O\left(\frac{1}{|y|}\right) = R - |x| \cos(\alpha - \varphi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right), \\
x &= (|x| \cos \alpha, |x| \sin \alpha), \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Теперь вспомним асимптотическое поведение функции Грина $\Phi(|x - y|) = (i/4) * H_0^{(1)}(k|x - y|)$ на бесконечности (см. (2.13))

$$H_0^{(1)}(k|x - y|) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{i(k|x - y| - \pi/4)} + O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right), \quad |y| = R \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

Таким образом, с помощью асимптотики в дальней зоне (2.46) получаем для фиксированного x

$$\begin{aligned}
H_0^{(1)}(k|x - y|) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{ikR} e^{i[k|x| \cos(\alpha - \varphi) + \pi/4]} = \\
&= \Phi^*(x, \varphi) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} + O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right), \quad |y| = R \rightarrow \infty. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Вернемся к интегралу по l_R , в котором $\partial/\partial n_y = \partial/\partial R$ при $y \in l_R$. Из соотношений (2.45) легко получить, что

$$\begin{aligned}
\left[u(y) \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] &= O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right), \quad R \rightarrow \infty, \\
\int_{l_R} \left[u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} - \Phi \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dl_y &= 2\pi R O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{R^{1/2}}\right). \quad (2.49)
\end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в оценке схожего интеграла по l_ε (см. рис. 2.2). Для $\varepsilon \rightarrow +0$ (т.е. $y \rightarrow x$) имеем

$$\begin{aligned}
\int_{l_\varepsilon} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dl_y &= \\
&= u(x) \int_{l_\varepsilon} \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} dl_y - \int_{l_\varepsilon} \Phi(|x - y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dl_y. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Здесь последнее подынтегральное выражение обладает только слабой особенностью, что приводит к следующей оценке (см. асимптотику функции Грина при малом аргументе (2.16)):

$$\left| \int_{l_\varepsilon} \Phi(|x - y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dl_y \right| \leq \max_{l_\varepsilon} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right| \frac{\ln \varepsilon}{2\pi} 2\pi \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (2.51)$$

поскольку функция $u(y)$ аналитична вне l .

Первый интеграл в правой части уравнения (2.50) при $\varepsilon \rightarrow +0$ ведет себя как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{l_\varepsilon} \frac{\partial \Phi(|x-y|)}{\partial n_y} dl_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\ln r)}{\partial r} 2\pi r d\psi = 1, \quad (2.52)$$

где введена полярная система координат (r, ψ) с началом в точке x .

Окончательно уравнение (2.44) дает

$$\begin{aligned} \int_l \left[u(y) \frac{\partial \Phi(|x-y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dl_y = \\ = - \int_{l_\varepsilon} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(|x-y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dl_y = -u(x). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Если одновременно поменять направление нормали \mathbf{n}_y и знак интеграла в (2.53), то приходим к требуемому соотношению.

Интегральная формула Кирхгофа–Гельмгольца (2.43) подразумевает, что произвольное скалярное волновое поле, удовлетворяющее условиям излучения, может быть представлено снаружи границы ∂D как комбинация потенциалов простого и двойного слоя с некоторыми плотностями, распределенными на границе ∂D . Таким образом, если известны значения как u , так и $\partial u / \partial n$ на границе, то из (2.43) можно напрямую определить неизвестную волновую функцию в произвольной точке x . К сожалению, данные две величины никогда не известны одновременно. В самом деле, если мы изучаем краевую задачу Дирихле, то на границе задана неизвестная функция $u(y)$. Если же рассматривается краевая задача Неймана, то известно значение нормальной производной $\partial u / \partial n$ на границе. В этом смысле формула Кирхгофа–Гельмгольца не дает решения краевой задачи.

Тем не менее результат доказанной теоремы вместе со свойствами потенциалов простого и двойного слоя позволяет вывести основное граничное интегральное уравнение (ГИУ) теории дифракции в рамках так называемого *прямого метода ГИУ*. Устремим точку x снаружи на границу $x \rightarrow y_0 \in \partial D$. Тогда согласно (2.43) и граничным значениям потенциалов простого и двойного слоя из предыдущего раздела имеем

$$\begin{aligned} u(y_0) &= \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(|y_0-y|)}{\partial n_y} - \Phi(|y_0-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] ds_y + \frac{u(y_0)}{2} \sim \\ &\sim u(y_0) = 2 \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(|y_0-y|)}{\partial n_y} - \Phi(|y_0-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] ds_y, \quad y_0 \in \partial D. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ниже приведена постановка задачи, представляющая главную проблему настоящей главы.

Постановка задачи дифракции. Пусть заданная падающая, гармоническая во времени акустическая волна с угловой частотой ω и комплексной амплитудой акустического давления $p^{\text{inc}}(x)$ падает на препятствие, занимающее область D (рис. 2.3). Когда волна встречает данное препятствие, структура волны начинает меняться. Любое изменение в падающей волне вследствие ее взаимодействия с препятствием называется *дифракцией*. Синонимами слова дифракция являются *рассеяние* и (в коротковолновом режиме) *отражение*. Дифрагированная волна в настоящей книге помечена верхним индексом «sc». Таким образом, из-за наличия препятствия и возникновения отраженной волны структура полного поля $p = p^{\text{inc}} + p^{\text{sc}}$ отлична от падающей волны.

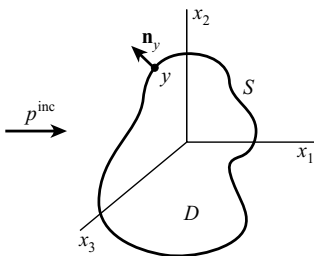


Рис. 2.3. Падение волны на препятствие D с граничной поверхностью S

Каждое из трех представленных волновых давлений удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2.42), но только p^{sc} удовлетворяет условиям излучения. Падающая волна приходит из дальней зоны и, следовательно, может считаться приходящей из бесконечности. Таким образом, условие излучения также нарушается и для полного давления, которое является суммой давлений в падающей и рассеянной волне. Следовательно, полученное интегральное представление Кирхгофа-Гельмгольца (2.43) справедливо только для рассеянной волны:

$$p^{\text{sc}}(x) = \int_{\partial D} \left[p^{\text{sc}}(y) \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial p^{\text{sc}}(y)}{\partial n_y} \right] ds_y, \quad (2.55)$$

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus D \quad (n = 2, 3),$$

и то же самое верно для ГИУ (2.54):

$$p^{\text{sc}}(y_0) = 2 \int_{\partial D} \left[p^{\text{sc}}(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|y_0 - y|) \frac{\partial p^{\text{sc}}(y)}{\partial n_y} \right] ds_y, \quad y_0 \in \partial D. \quad (2.56)$$

Теперь два разных типа граничных условий физически относятся к случаям акустически твердой и акустически мягкой границы препятствия. В первом случае (вспомним, что $v_n = (i\rho_0\omega)^{-1}(\partial p/\partial n)$), если волновой процесс гармоничен во времени)

$$v_n|_{\partial D} = 0 \sim \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial D} = 0 \sim \frac{\partial p^{\text{sc}}}{\partial n}|_{\partial D} = -\frac{\partial p^{\text{inc}}}{\partial n}|_{\partial D}, \quad (2.57)$$

а во втором

$$p|_{\partial D} = 0 \sim p^{\text{sc}}|_{\partial D} = -p^{\text{inc}}|_{\partial D}. \quad (2.58)$$

В обоих случаях приходим к ГИУ с помощью подстановки соответствующих граничных условий (2.57) или (2.58) в уравнение (2.56). Неудобство будет только в том, что в обоих случаях правая часть представлена в виде квадратуры. Незначительное изменение трактовки представления Кирхгофа–Гельмгольца позволяет устранить данное неудобство.

С этой целью вернемся к стандартным преобразованиям с формулой Грина, примененной к паре функций $u_1(y) = p^{\text{inc}}(y)$ и $u_2(y) = \Phi(|x - y|)$, каждая из которых аналитична и удовлетворяет уравнению Гельмгольца внутри области D , если x лежит вне D . Тогда применение интегральной формулы Грина внутри области D доказывает, что при $n = 2, 3$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D [p^{\text{inc}}(y)\Delta_y\Phi(|x - y|) - \Phi(|x - y|)\Delta_y p^{\text{inc}}(y)] dV_y = \\ &= - \int_{\partial D} \left[p^{\text{inc}}(y) \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial p^{\text{inc}}(y)}{\partial n_y} \right] ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Объединяя вместе (2.59) и (2.56), получаем более подходящее представление для рассеянного волнового поля в терминах полного волнового давления:

$$\begin{aligned} p^{\text{sc}}(x) &= \int_{\partial D} \left[p(y) \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} \right] ds_y, \\ x &\in \mathbb{R}^n \setminus D \quad (n = 2, 3). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Теперь, используя предельные граничные значения потенциалов простого и двойного слоя и полагая $x \rightarrow y_0 \in \partial D$, приходим к альтернативному интегральному представлению. Вместо (2.56) имеем

$$\begin{aligned} p^{\text{sc}}(y_0) &= \int_{\partial D} \left[p(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|y_0 - y|) \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} \right] ds_y + \frac{p(y_0)}{2}, \\ y_0 &\in \partial D. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Из (2.57), (2.58), (2.61) становится ясно, что задача дифракции для акустически твердого препятствия (краевая задачи типа Неймана) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$p(y_0) - 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} p(y) ds_y = 2p^{\text{inc}}(y_0), \quad y_0 \in \partial D, \quad (2.62)$$

поскольку $p^{\text{sc}} = p - p^{\text{inc}}$. Аналогично акустически мягкий случай (краевая задача типа Дирихле) может быть сведен к уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_{\partial D} \Phi(|y_0 - y|) \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} ds_y = p^{\text{inc}}(y_0), \quad y_0 \in \partial D. \quad (2.63)$$

Примечания

1. Коротко опишем качественные характеристики уравнений (2.62) и (2.63). Как было отмечено выше, первое из них является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Как установлено в (2.34), для кусочно-гладкой границы ядро кусочно-непрерывно, так что интегральный оператор в уравнении (2.62) компактен в пространстве $C(\partial D)$ и уравнение (2.62) может быть изучено в рамках теории Фредгольма (раздел 1.5). Это означает возможность применения как теоретических, так и хорошо развитых численных методов.

Интегральный оператор (2.63) — первого рода, и очевидно, что он обладает слабой особенностью. Следовательно, он опять-таки типа Фредгольма, и уравнение (2.63) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода с компактным оператором в $C(\partial D)$.

2. Уравнение (2.62) справедливо в случае, когда точка y_0 находится на гладкой части границы. Если y_0 попадает на острый угол величиной α , то коэффициент 2 перед интегральным оператором должен быть заменен на другой, выраженный через α , в соответствии с описанными свойствами потенциала двойного слоя (см. предыдущую главу).

3. Поскольку стройной теорией Фредгольма описываются только интегральные уравнения второго рода, много усилий было направлено на формулировку краевой задачи Дирихле в терминах ГИУ Фредгольма второго рода. К счастью, данный результат может быть получен применением так называемого *непрямого метода ГИУ*, который состоит в следующем. Функция

$$p^{\text{sc}}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} \psi(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus D \quad (n = 2, 3), \quad (2.64)$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условиям излучения при любой непрерывной плотности ψ . Если в случае акустически мягкого препятствия точка x приближается к границе ∂D , $x \rightarrow y_0 \in \partial D$, тогда,

используя свойства потенциала двойного слоя и граничные условия (2.58), приходим к уравнению

$$\psi(y_0) + 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} \psi(y) ds_y = -2p^{\text{inc}}(y_0), \quad y_0 \in \partial D, \quad (2.65)$$

которое является уравнением второго рода.

2.3. Свойства интегрального оператора теории дифракции

Качественные свойства полученных интегральных уравнений тесно связаны с двумя основными свойствами внешних краевых задач типа Дирихле и Неймана, установленных классиками (см., например, [29, 63, 131]). Для краткости приводим здесь эти свойства без доказательств.

Теорема 1. *Каждая из внешних краевых задач Дирихле и Неймана имеет единственное решение для уравнения Гельмгольца в классе функций, удовлетворяющих условию излучения.*

Теорема 2. *Каждая внутренняя краевая задача Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца имеет единственное решение для всех значений волнового числа k , за исключением счетного множества положительных значений k (относящихся к собственным, или резонансным, частотам).*

Из этих классических результатов можно извлечь несколько важных свойств рассматриваемых интегральных операторов.

Теорема 3. *Интегральное уравнение второго рода (2.65) непрямого метода ГИУ для внешней краевой задачи Дирихле имеет единственное решение для любого k , за исключением тех, которые отвечают собственным значениям внутренней задачи Неймана.*

Доказательство. Согласно теории Фредгольма для интегральных уравнений второго рода, уравнение (2.65) однозначно разрешимо, если однородное уравнение (2.65) имеет только тривиальное решение. Пусть параметр k таков, что существует нетривиальное решение ψ однородного уравнения (2.65), т. е.

$$\frac{\psi(y_0)}{2} + \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} \psi(y) ds_y = 0, \quad y_0 \in \partial D. \quad (2.66)$$

Введем потенциал двойного слоя с плотностью

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} \psi(y) ds_y. \quad (2.67)$$

Далее, переходя к внешнему пределу для граничного значения потенциала двойного слоя, получаем

$$u_+(y_0) = \frac{\psi(y_0)}{2} + \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} \psi(y) ds_y = 0. \quad (2.68)$$

(знаком «+» обозначено предельное значение при переходе на граничный контур ∂D снаружи). Согласно теореме 1, $u(x) \equiv 0$ вне D как решение внешней задачи Дирихле с тривиальным граничным условием. Это означает, что $\partial u_+(y_0)/\partial n = 0$, $y_0 \in \partial D$. Далее непрерывность нормальной производной потенциала двойного слоя (теорема 4 из раздела 2.1) доказывает что $\partial u_-(y_0)/\partial n = 0$, $y_0 \in \partial D$. Таким образом, видно, что ненулевое решение внешней задачи Дирихле порождает ненулевое (т.е. собственное) решение внутренней задачи Неймана.

Схожая техника может быть применена и для решения внешней задачи Неймана.

Теорема 4. *Интегральное уравнение второго рода (2.62) прямого метода ГИУ для внешней краевой задачи Неймана имеет единственное решение для любого k , за исключением собственных значений внутренней задачи Дирихле.*

В некотором роде неожиданно, что схожий результат справедлив для ГИУ первого рода (2.63). Доказательство соответствующей теоремы может быть найдено, к примеру, в книге [26].

Теорема 5. *Интегральное уравнение первого рода (2.63) с ядром, содержащим слабую особенность, однозначно разрешимо для всех значений параметра k , за исключением тех, которые отвечают собственным значениям внутренней задачи Дирихле.*

2.3.1. Задача дифракции для низких частот. Из основных вариационных принципов следует, что счетное множество собственных значений для обоих типов внутренних краевых задач имеет предельную точку на бесконечности (см. [30], а также рассуждения в главе 4). Следовательно, всегда существует наименьшая собственная частота. Далее, из теорем 3–5 напрямую следует, что рассмотренные интегральные уравнения (2.62), (2.63), (2.65) обладают каждое единственным решением, если частота меньше, чем первое собственное число соответствующей внутренней задачи. Таким образом, для достаточно малых частот можно напрямую решать эти уравнения как аналитически, так и численно.

2.3.2. Пример. Низкочастотная дифракция на твердом круглом диске. Рассмотрим пример двумерной дифракции для акустически твердого препятствия. Пусть a — радиус диска и пусть падающая волна будет плоской, распространяющейся в направлении оси x_1 . Тогда при $k \rightarrow 0$ имеем

$$\Phi = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \sim -\frac{1}{2\pi} [\ln(kr) + \gamma - \ln 2] + \frac{i}{4} + O(k^2 \ln k), \quad (2.69)$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_y} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n_y} = -\frac{\cos(r, n_y)}{2\pi r},$$

$$r = |y_0 - y|, \quad p^{\text{inc}}(x) = e^{ikx_1}.$$

Представление в полярной системе координат имеет вид

$$y = \{a \cos \theta, a \sin \theta\}, \quad y_0 = \{a \cos \psi, a \sin \psi\},$$

$$r = y - y_0 = \{a(\cos \theta - \cos \psi), a(\sin \theta - \sin \psi)\}, \quad n_y = \{\cos \theta, \sin \theta\},$$

$$\cos(r, n_y) = \frac{(r \cdot n_y)}{r} = a \frac{\cos \theta (\cos \theta - \cos \psi) + \sin \theta (\sin \theta - \sin \psi)}{r}, \quad (2.70)$$

следовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_y} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{1 - \cos(\theta - \psi)}{(\cos \theta - \cos \psi)^2 + (\sin \theta - \sin \psi)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi a} \frac{1 - \cos(\theta - \psi)}{2[1 - \cos(\theta - \psi)]} = -\frac{1}{4\pi a}, \quad (2.71)$$

и мы приходим к следующему интегральному уравнению для твердого круглого диска, которое вытекает из (2.62):

$$p(\psi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 2p^{\text{inc}}(\psi) \quad (dl_y = a d\theta) \sim$$

$$\sim p(\psi) + \frac{P}{2\pi} = 2e^{ika \cos \psi}, \quad P = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta, \quad (2.72)$$

где P — некоторая константа.

Теперь, интегрируя последнее уравнение на интервале $[0, 2\pi]$, получаем

$$\int_0^{2\pi} p(\psi) d\psi + P = 2 \int_0^{2\pi} e^{ika \cos \psi} d\psi \sim P = 2\pi J_0(ak) \quad (2.73)$$

(J_0 — функция Бесселя), где использовано значение табличного интеграла, возникающего в соотношении (2.73). Далее, объединяя (2.72) и (2.73), получаем решение основного интегрального уравнения в случае низких частот

$$p(\psi) = 2e^{ika \cos \psi} - J_0(ak) \approx 1 + 2ika \cos \psi, \quad k \rightarrow 0. \quad (2.74)$$

Заметим, что наивысший порядок погрешности данного решения привносит аппроксимация ядра в (2.69), так что истинная погрешность выражения (2.74), представляющего решение ГИУ, равна $O(k^2 \ln k)$.

В данном примере плоская падающая волна была взята как наиболее стандартный тип падающих волн, встречающихся в теоретических исследованиях и на практике. Возможно, популярность данного типа волн в теории дифракции связана с тем, что любая волна может быть локально представлена как плоская. Другая причина состоит в том, что все другие простые типы волн (цилиндрическая, сферическая и т. д.) могут быть, как правило, представлены в виде суперпозиции плоских волн (см., например, [10]).

2.3.3. Произвольное трехмерное препятствие. Акустически твердая граница. Выведем общую низкочастотную форму интегрального уравнения в трехмерном случае с точностью до малых линейных (по отношению к малому параметру k) членов. Для большей определенности будем рассматривать плоскую волну, падающую на препятствие D с акустически твердой границей, т. е. будем работать с уравнением (2.62). Если направление плоской волны совпадает, например, с осью x_3 , то имеем $p^{\text{inc}}(x) = \exp(iky_{0_3})$ в уравнении (2.62), или $p^{\text{inc}}(x) = 1 + ik y_{0_3} + O(k^2)$ для малого k .

Выпишем первые асимптотические члены нормальной производной ядра уравнения (2.62):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) \cos(n_y, r) = \\ &= \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1 + ikr}{4\pi r} \right) \cos(n_y, r) + O(k^2) = \\ &= -\frac{1}{4\pi r^2} \cos(n_y, r) + O(k^2) = \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} + O(k^2), \\ \Phi_0(|y_0 - y|) &= \frac{1}{4\pi r}, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi r^2} \cos(n_y, r), \quad r = |y_0 - y|, \end{aligned} \quad (2.75)$$

так что для малых частот (с погрешностью $O(k^2)$) уравнение (2.62) приобретает вид

$$p(y_0) - 2 \int_S \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} p(y) ds_y = 2(1 + ik y_{0_3}), \quad y_0 \in S. \quad (2.76)$$

Весьма интересно, что в рамках такой аппроксимации ядро не зависит от параметра k . Более того, оно совпадает с предельным ($k \rightarrow 0$) низкочастотным выражением. Следовательно, первые два асимптотических члена низкочастотного решения рассматриваемого интегрального уравнения могут быть получены решением уравнения (2.76) только для двух соответствующих членов правой части, так что $p(y) = p_0(y) + ikp_1(y) + O(k^2)$.

Докажем, что для произвольной гладкой границы поверхности S препятствия главный асимптотический член, который определяется как

решение уравнения

$$p_0(y_0) - 2 \int_S \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} p_0(y) ds_y = 2, \quad y_0 \in S, \quad (2.77)$$

есть некоторая константа $p_0(y) \equiv p_0$. Для того чтобы доказать это утверждение, оценим, как интегральный оператор в уравнении (2.77) действует на константу. Для этого возьмем, следуя стандартному подходу, две функции $u_1(y) \equiv p_0$ и $u_2(y) = \Phi_0(|x - y|)$, обе аналитические внутри D при x , находящемся вне D . Тогда формула Грина, примененная по области D , приводит к соотношению (сравните с (2.28))

$$0 = \int_D [u_1(y) \Delta_y u_2(y) - u_2(y) \Delta_y u_1(y)] dy_1 dy_2 = \int_S \frac{\partial \Phi_0(|x - y|)}{\partial n_y} p_0 ds_y, \\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus D. \quad (2.78)$$

Теперь, применяя предельный переход во внешней области $x \rightarrow y_0 \in S$ к обеим частям этого уравнения, получим

$$\frac{p_0}{2} + \int_S \frac{\partial \Phi_0(|x - y|)}{\partial n_y} p_0 ds_y = 0 \sim \int_S \frac{\partial \Phi_0(|x - y|)}{\partial n_y} p_0 ds_y = -\frac{p_0}{2}, \quad (2.79)$$

так что уравнение (2.77) приобретает вид

$$2p_0 = 2 \sim p_0(y) \equiv p_0 = 1. \quad (2.80)$$

Полученный результат вполне понятен с интуитивной (эвристической) точки зрения. В самом деле, низкочастотный предел эквивалентен случаю очень маленького препятствия с фиксированной частотой. Но если препятствие бесконечно мало, то падающая волна его не чувствует и полное давление остается без каких-либо возмущений, т. е. $p_0|_S = p^{\text{inc}}|_{k=0} = 1$.

К сожалению, следующее асимптотическое слагаемое, относящееся ко второму члену в правой части уравнения (2.76), не может быть построено для произвольной формы, но допускает получение точного решения для некоторых канонических форм. Случай сферического отражателя рассматривается в следующем разделе.

Примечания

1. Теоремы 3–5 утверждают, что рассмотренные интегральные уравнения однозначно разрешимы для любого k , за исключением счетного множества собственных значений для соответствующих внутренних краевых задач. Результаты, сформулированные в последней части раздела 1.5, гарантируют, что по крайней мере для уравнений второго рода можно легко построить устойчивое численное решение для произвольной границы неканонической формы. Конструированию теории для граничных интегральных уравнений, которые были бы корректно

разрешимы для любых k , посвящено множество работ, так как внешние задачи всегда однозначно разрешимы, в отличие от их интегральных уравнений (см., например, [94, 98]). В формальной теории эти результаты, возможно, достаточно актуальны, однако они менее значимы с практической точки зрения. Если составить собственную компьютерную программу на любом алгоритмическом языке без учета значения параметра k , то подобный алгоритм для внешней задачи формально должен разойтись для описанного множества собственных значений. Тем не менее на практике этого не случается. При конкретных вычислениях никогда не чувствуется, что алгоритм ведет себя отлично от нормальных случаев, пока «особое» значение k не достигается с точностью 10^{-6} – 10^{-7} . Практически если взять любое k с тремя или четырьмя значащими цифрами, то код для алгоритма, предназначенного для регулярных значений k , будет устойчиво работать и в данном случае.

2. Аналогичная картина наблюдается при решении задач с кусочно-гладкими граничными поверхностями (трехмерный случай) или контурами (двумерный случай). Все полученные уравнения второго рода в том виде, как они записаны выше, с формальной точки зрения справедливы, когда y_0 находится на гладкой части границы. Если же y_0 находится в угловой точке или на ребре, то коэффициент перед неизвестной функцией вне интеграла должен быть изменен, и необходимо учитывать данный факт при составлении компьютерной программы. Однако лучше забыть об этой особенности задачи и выбирать такую сетку, чтобы ее узлы не попадали на какую-либо острую границу. Тогда на практике полученные результаты будут правильными. Точность подобных вычислений будет даже выше, чем с подгонкой коэффициентов в точках изломов границы.

2.4. Низкочастотное решение для сферического отражателя

2.4.1. Акустически твердое препятствие. Второй асимптотический член решения уравнения (2.76) должен быть найден из следующего уравнения:

$$p_1(y_0) - 2 \int_S \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} p_1(y) ds_y = 2y_{03}, \quad y_0 \in S. \quad (2.81)$$

Введем сферическую систему координат для точек y и y_0 на поверхности сферы радиуса a

$$\begin{aligned} y &= a(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ y_0 &= a(\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0). \end{aligned}$$

В ней

$$\begin{aligned} r^2 &= |y_0 - y|^2 = 2a^2[1 - \cos \theta \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)], \\ \cos(n_y, r) &= \frac{a}{r} [1 - \cos \theta \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)], \quad (2.82) \\ \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} &= -\frac{\cos(n_y, r)}{4\pi r^2} = -\frac{1}{8\pi a r}. \end{aligned}$$

Рассматриваемая задача осесимметрична, так что мы ищем решение, которое не зависит от угла φ . Тогда уравнение (2.81) в сферических координатах можно переписать в виде

$$\begin{aligned} p_1(\theta_0) + \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int_0^\pi K_0(\theta_0, \theta) p_1(\theta) d\theta &= 2a \cos \theta_0, \quad 0 \leq \theta_0 \leq \pi, \\ K_0(\theta_0, \theta) &= \sin \theta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \theta \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi}} = \quad (2.83) \\ &= \frac{2\sqrt{2} \sin \theta}{\left| \sin \left(\theta + \frac{\theta_0}{2} \right) \right|} \mathbf{K} \left(\frac{\sqrt{\sin \theta \sin \theta_0}}{\left| \sin \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \right|} \right), \end{aligned}$$

где \mathbf{K} — полный эллиптический интеграл первого рода [20].

С трудом верится, что это уравнение допускает точное аналитическое решение. Многие математики потратили немало усилий, доказывая, что точное решение этого уравнения может быть найдено в виде

$$p_1(\theta) = B a \cos \theta = B y_3, \quad (2.84)$$

где B — некоторая константа. Рассмотренная задача демонстрирует прекрасный пример того, что обсуждалось в предисловии: весьма часто случается, что эвристические идеи помогают достигнуть прорыва в некоторых задачах чистой или прикладной математики, которые не могут быть решены напрямую строгими формальными методами. Лорд Рэлей был первым, кто заметил, что малая сфера ведет себя как диполь при облучении плоской волной (хорошее изложение этого вопроса можно найти, например, в [89, 106]).

Докажем, что решение уравнения (2.83), или, что тоже самое, уравнения (2.81), имеет форму (2.84). С этой целью опять применим (по области D) стандартный подход с использования формулы Грина, с двумя функциями $u_2(y) = y_3$ и $u_2(y) = \Phi_0(|x - y|)$ (точка x зафиксирована вне области D). Тогда формула Грина дает

$$0 = \int_D [u_1(y) \Delta_y u_2(y) - u_2(y) \Delta_y u_1(y)] dy_1 dy_2 =$$

$$= \int_S \left[y_3 \frac{\partial \Phi_0(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi_0(|x - y|) \frac{\partial y_3}{\partial n_y} \right] ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D. \quad (2.85)$$

Теперь, полагая $x \rightarrow y_0 \in S$ в уравнении (2.85) и пользуясь граничными свойствами потенциалов простого и двойного слоя, получаем

$$\frac{y_{03}}{2} + \int_S \left[y_3 \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} - \Phi_0(|y_0 - y|) \frac{\partial y_3}{\partial n_y} \right] ds_y = 0. \quad (2.86)$$

Очевидно, что на сферической поверхности радиуса a выполняются следующие соотношения (сравните с (2.82)):

$$\begin{aligned} y_3 &= a \cos \theta, \quad \frac{\partial y_3}{\partial n_y} = \cos \theta = \frac{y_3}{a}, \\ \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} &= -\frac{\cos(n_y, r)}{4\pi r^2} = -\frac{1}{8\pi a r}, \\ \Phi_0(|y_0 - y|) &= \frac{1}{4\pi r} = -2a \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

следовательно, интеграл в (2.86) равен

$$-\frac{y_{03}}{2} = \int_S \left[y_3 \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} - \Phi_0(|y_0 - y|) \frac{\partial y_3}{\partial n_y} \right] ds_y = 3 \int_S y_3 \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} ds_y. \quad (2.88)$$

Таким образом, интегральный оператор в уравнении (2.81) в случае малого сферического препятствия действует на функцию y_3 как

$$\int_S \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} y_3 ds_y = -\frac{y_{03}}{6}. \quad (2.89)$$

Теперь ясно, что точное решение уравнения (2.81), а также его эквивалентной формы (2.83), может быть получено подстановкой подходящей структуры (2.84) в уравнение (2.81), и вместе с уравнением (2.89) это приводит к соотношению

$$\frac{4}{3} B a y_3 = 2 a y_3 \sim B = \frac{3}{2} \sim p_1 = \frac{3}{2} y_3 = \frac{3}{2} a \cos \theta, \quad (2.90)$$

которое доказывает гипотезу о структуре функции $p_1(\theta)$, записанной в форме (2.84).

Наконец, принимая во внимание, что $p_0(\theta) \equiv 1$, а также замечание после уравнения (2.76), приходим к полной двучленной низкочастотной асимптотике в случае сферического препятствия в следующей форме:

$$p(\theta) = 1 + \frac{3}{2} i k a \cos \theta. \quad (2.91)$$

2.4.2. Акустически мягкое препятствие. В этом случае задача может быть сведена к уравнению (2.63). Низкочастотное разложение для ядра здесь представляется в виде

$$\begin{aligned}\Phi(|y_0 - y|) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi r} + \frac{ik}{4\pi} + O(k^2) = \\ &= \Phi_0(|y_0 - y|) + \frac{ik}{4\pi} + O(k^2) \quad (r = |y_0 - y|), \quad (2.92)\end{aligned}$$

и, таким образом, уравнение (2.63) эквивалентно с погрешностью $O(k^2)$ уравнению

$$\int_S \left[\Phi_0(|y_0 - y|) + \frac{ik}{4\pi} \right] g(y) ds_y = 1 + ik y_{03}, \quad y_0 \in S, \quad g(y) = \frac{\partial p(y)}{\partial n_y}. \quad (2.93)$$

Второе слагаемое в ядре порождает некоторую константу, следовательно, решение уравнения (2.93) допускает следующее разложение:

$$\begin{aligned}\int_S \Phi_0(|y_0 - y|) g(y) ds_y &= 1 + ik y_{03} - \frac{ikI}{4\pi}, \quad y_0 \in S, \\ I &= \int_S g(y) ds_y = \int_S g_0(y) ds_y + O(k), \quad g(y) = g_0(y) + ik g_1(y),\end{aligned} \quad (2.94)$$

где функции g_0 и g_1 не зависят от волнового числа k и дают соответственно главный (нулевой) и первый асимптотические члены решения. Первый из них является решением уравнения (2.94) с единичной правой частью, а второй — уравнения с правой частью в виде $y_{03} - I/(4\pi)$.

Покажем теперь, что решение первого уравнения — по-прежнему константа, т. е. это верно также и в случае акустически мягкого препятствия. Для этого изучим влияние оператора (2.94) на постоянную $g_0(y) \equiv g_0$. В случае сферического препятствия вопрос решается легко (см. (2.87) и (2.79)):

$$\int_S \Phi_0(|y_0 - y|) g_0 ds_y = -2a \int_S \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} g_0 ds_y = (-2a) \left(-\frac{g_0}{2} \right) = a g_0, \quad (2.95)$$

следовательно, $g_0(y) \equiv g_0 = 1/a$.

Далее если пренебречь всеми слагаемыми порядка $O(k^2)$ включая возникающие для ikI в уравнении (2.94), то первый член разложения, функция $g_1(y)$, находится из уравнения

$$\int_S \Phi_0(|y_0 - y|) g_1(y) ds_y = -\frac{I}{4\pi} + y_{03}, \quad (2.96)$$

где

$$I = \int_S g_0 ds_y = 4\pi a^2 g_0 = 4\pi a, \quad y_0 \in S.$$

Очевидно, решение этого уравнения может быть построено в виде суммы $g_1(y) = h_1(y) + h_2(y)$, в которой первая из двух функций отвечает за постоянную правую часть в (2.96): $h_1(y) \equiv -I/(4\pi a) = -1$, а вторая определяется из уравнения

$$\int_S \Phi_0(|y_0 - y|) h_2(y) ds_y = y_{03}, \quad y_0 \in S. \quad (2.97)$$

Так как $\Phi_0(|y_0 - y|) = -2a \partial \Phi_0(|y_0 - y|)/\partial n_y$ для сферического препятствия (см. уравнение (2.87)), с учетом соотношения (2.89) заключаем, что $h_2(y) = 3y_3/a$.

Наконец, объединяя вместе выражения для функций g_0 , h_1 , h_2 , приходим к следующему низкочастотному асимптотическому решению

$$\frac{\partial p(y)}{\partial n_y} = g(y) = \frac{1}{a} + ik \left(-1 + \frac{3y_3}{a} \right) = \frac{1 + ika(3 \cos \theta - 1)}{a}. \quad (2.98)$$

Примечания

1. Любопытно, что рассмотренный здесь метод позволил построить решение весьма сложного интегрального уравнения (2.83) для двух конкретных правых частей, которое не так просто получить альтернативным методом. Очень часто основные принципы математической физики, такие как теорема Грина, позволяют вывести точную форму решения некоторого сложного дифференциального или интегрального уравнения.

2. Найти решение задачи дифракции в низкочастотном диапазоне в явном виде позволяют и некоторые другие канонические формы препятствия. Назовем здесь задачу дифракции на полуплоскости, на эллипсе, на клине с бесконечными гранями. Хороший обзор известных аналитических решений приведен в книге [70].

2.5. Диаграмма рассеяния для канонических форм

Основное интегральное представление решения дифракционной задачи, которое определяется формулой Кирхгофа–Гельмгольца (2.60), допускает построение так называемой *диаграммы рассеяния*. Последняя определяется как функция, представляющая зависимость вещественной амплитуды рассеяния от угла наблюдения в дальней зоне.

Как и в формуле (2.46), рассмотрим представление функции Грина в дальней зоне, теперь в трехмерном случае и для большого $|x|$:

$$r = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} =$$

$$= \sqrt{|x|^2 - 2(x, y) + |y|^2} = |x| - \frac{(x, y)}{|x|} + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (2.99)$$

Тогда в дальней зоне имеем в асимптотическом смысле

$$\begin{aligned} \Phi(|x - y|) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \approx \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} e^{-ik(x, y)/|x|}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} &\approx \frac{ik}{4\pi r} e^{ikr} \cos(n_y, y - x) \approx -\frac{e^{ik(|x| - (x, y)/|x|)}}{4\pi|x|} ik \cos(n_y, x), \end{aligned} \quad (2.100)$$

так что амплитуда рассеяния (2.60) в дальней зоне при $|x| \rightarrow \infty$ принимает вид

$$p^{sc}(x) \sim -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \int_S \left[p(y) ik \cos(n_y, x) + \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} \right] e^{-ik(x, y)/|x|} ds_y. \quad (2.101)$$

Напомним, что для акустически твердого препятствия второй член в квадратных скобках исчезает и то же самое происходит с первым членом для акустически мягкого тела. Заметим также, что выражение (2.101) подтверждает, что любое отраженное волновое поле в дальней зоне ведет себя как сферическая волна.

Аналогичная формула может быть получена в двумерном случае:

$$\begin{aligned} p^{sc}(x) \sim -\frac{(1+i)e^{ik|x|}}{4\sqrt{\pi k|x|}} \int_l \left[p(y) ik \cos(n_y, x) + \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} \right] \times \\ \times e^{-ik(x, y)/|x|} dl_y, \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Оба выражения справедливы для границы произвольной формы и произвольного значения частотного параметра (волнового числа) k . Тем не менее они позволяют получить явный аналитический вид только для канонических геометрий и низких частот.

2.5.1. Низкочастотное рассеяние на твердом круглом диске.

Напомним, что в случае твердого круглого диска исчезает слагаемое $\partial p(y)/\partial n_y$ в уравнении (2.102), а $p(y)$ в системе полярных координат дается формулой (2.74). Если точка x в дальней зоне представлена в той же полярной системе $\{x = (x_1 = R \cos \alpha, x_2 = R \sin \alpha), R = |x|, y = (a \cos \psi, a \sin \psi)\}$, то, пользуясь очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} \cos(n_y, x) &= \frac{(n_y, x)}{|x|} = \frac{R(\cos \psi \cos \alpha + \sin \psi \sin \alpha)}{R} = \cos(\psi - \alpha), \\ \frac{(x, y)}{|x|} &= \frac{Ra(\cos \alpha \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi)}{R} = a \cos(\psi - \alpha) \end{aligned} \quad (2.103)$$

и опуская несущественный множитель, можно свести вычисление вещественной амплитуды рассеяния к вычислению интеграла

$$\begin{aligned}
|p^{\text{sc}}(\alpha)| &\sim \frac{k}{\sqrt{k|x|}} \left| \int_l p(y) \cos(n_y, x) e^{-ik(x,y)/|x|} dl_y \right| = \\
&= \frac{ak}{\sqrt{k|x|}} \left| \int_0^{2\pi} (1 + 2iak \cos \psi) \cos(\psi - \alpha) e^{-iak \cos(\psi - \alpha)} d\psi \right| \sim \\
&\sim \frac{(ak)^2}{\sqrt{k|x|}} |1 - 2 \cos \alpha|, \quad (2.104)
\end{aligned}$$

где учтен только главный асимптотический член по параметру k . Последнее выражение в (2.104) показывает, что с уменьшением частоты амплитуда рассеяния убывает как $O(k^{3/2})$. Зависимость от угла наблюдения α показана в виде диаграммы на рис. 2.4.

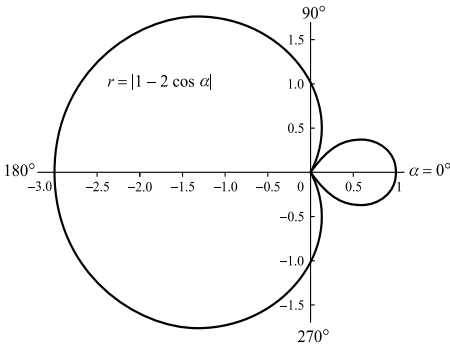


Рис. 2.4. Диаграмма рассеяния для твердого диска как функция полярного угла α

2.5.2. Низкочастотная диаграмма для акустически твердой сферы. Здесь мы снова вернемся к сферической системе координат (см. уравнение (2.82)) и заменим соответствующие выражения в формуле (2.101). Тогда, задавая углы наблюдения (α, β) для точки x в дальней зоне таким образом, что

$$x = (R \sin \alpha \cos \beta, R \sin \alpha \sin \beta, R \sin \alpha), \quad R = |x|, \quad (2.105)$$

и принимая во внимание очевидные соотношения

$$p(y) = p(\theta) = 1 + \frac{3}{2} ika \cos \theta, \quad \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} = 0,$$

$$\begin{aligned}\cos(n_y, x) &= \frac{(n_y, x)}{|x|} = \frac{(y, x)}{|y| |x|} = \sin \alpha \sin \theta \cos(\varphi - \beta) + \cos \alpha \cos \theta, \\ \frac{(x, y)}{|x|} &= a[\sin \alpha \sin \theta \cos(\varphi - \beta) + \cos \alpha \cos \theta],\end{aligned}\quad (2.106)$$

а также опуская некоторый несущественный множитель, получим главный асимптотический член в виде

$$\begin{aligned}|p^{\text{sc}}(\alpha)| &\sim \frac{k}{|x|} \left| \int_S p(y) \cos(n_y, x) e^{-ik(x,y)/|x|} ds_y \right| = \\ &= \frac{ak}{|x|} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(1 + \frac{3}{2} iak \cos \theta \right) [\sin \alpha \sin \theta \cos(\varphi - \beta) + \cos \alpha \cos \theta] \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-iak[\sin \alpha \sin \theta \cos(\varphi - \beta) + \cos \alpha \cos \theta]} \sin \theta d\varphi d\theta \right|. \quad (2.107)\end{aligned}$$

Легко доказать, что последний интеграл не зависит от полярного угла β , и при вычислении интеграла по φ получаем следующую зависимость от полярного угла α :

$$|p^{\text{sc}}(\alpha)| \sim \frac{(ak)^2}{|x|} \left| 1 - \frac{3}{2} \cos \alpha \right|, \quad (2.108)$$

изображенную на рис. 2.5. При уменьшении частоты это малая величина порядка $O(k^2)$.

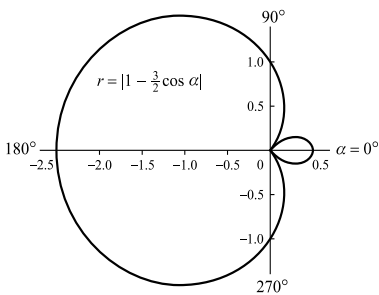


Рис. 2.5. Диаграмма рассеяния для твердой сферы как функция полярного угла α

Заметим, что диаграммы на рис. 2.4, 2.5 выбраны таким образом, что $\alpha = 0$ относится к прямому рассеянию и $\alpha = 180^\circ$ — к обратному.

2.5.3. Рассеяние на акустически мягкой сфере. В данном случае необходимо учесть, что в (2.101) $p(y) = 0$, $\partial p(y)/\partial n_y = [1 + ika(3 \cos \theta - 1)]/a$ (см. (2.98)). Таким образом, приходим к следующему выражению для главного члена асимптотики:

$$\begin{aligned}
 |p^{\text{sc}}(\alpha)| &\sim \frac{1}{|x|} \left| \int_S \frac{\partial p}{\partial n_y} e^{-ik(x,y)/|x|} ds_y \right| = \\
 &= \frac{1}{|x|} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [1 + ika(3 \cos \theta - 1)] e^{-iak(\sin \alpha \sin \theta \cos \varphi + \cos \alpha \cos \theta)} \sin \theta d\varphi d\theta \right| \sim \\
 &\sim \frac{a}{|x|} |1 - ika| + O(k^2) = \frac{a}{|x|} + O(k^2). \quad (2.109)
 \end{aligned}$$

Примечания

1. Очень важно для приложений, что в случае акустически твердого препятствия всегда существуют углы отражения, при которых (в асимптотическом приближении) объект не излучает какой-либо энергии. Это значит, что, пока мы находимся в дальней зоне в направлении данных углов наблюдения, обнаружить присутствие объекта невозможно. В двумерной задаче эти углы $\alpha = \pm \arccos(1/2) = \pm 60^\circ$, а в трехмерном случае $\alpha = \pm \arccos(2/3) \approx \pm 48^\circ$ (см. рис. 2.4, 2.5). Напротив, малая мягкая сфера излучает одинаковую энергию во всех направлениях.

2. Низкочастотная амплитуда отражения для акустически твердого препятствия выглядит правдоподобной, так как и в двумерном и в трехмерном случаях она исчезает при уменьшении частоты. Тем не менее при акустически мягком препятствии отраженная амплитуда не исчезает для бесконечно малого k , что кажется парадоксальным. Однако разгадка этого парадокса достаточно проста. Построенная амплитуда отражения получена при двух предположениях: 1) k мало и 2) расстояние $|x|$ велико. Они могут при определенных условиях противоречить друг другу, в результате полученное решение может оказаться справедливым не равномерно по этим двум асимптотическим параметрам. В самом деле, в дальней зоне есть только безразмерный параметр $k|x|$, где первый множитель мал, а второй велик, так что мы не можем предсказать априори, является ли их произведение малым или большим. Математически это эквивалентно альтернативной записи уравнения (2.109) в форме

$$|p^{\text{sc}}(\alpha)| \sim \frac{ak}{|kx|} + O(k^2), \quad (2.110)$$

и теперь ясно, что отраженная амплитуда убывает с уменьшением безразмерного параметра ak . Физически этот парадокс связан с тем

фактом, что малая частота порождает более длинную волну. Относительно аппроксимации в дальней зоне необходимо помнить, что дальность подразумевает также, что расстояние $|x|$ намного больше длины волны.

В заключение отметим еще раз, что множество примеров рассеяния препятствиями различных канонических форм рассмотрено в [70, 78].

2.6. Асимптотический характер теории дифракции Кирхгофа

Как отмечено выше, в общем случае препятствий произвольной формы возникающее ГИУ может быть решено тем или иным численным методом. В обычных случаях (к примеру, уравнения Фредгольма второго рода) вполне применимо прямое численное решение (см. раздел 1.5). Применение численных методов к нерегулярным задачам будет рассмотрено в главе 9. Выше мы видели, что канонические геометрии допускают аналитические решения на низких частотах. Другой крайний случай, в котором задача может быть изучена аналитически, относится к высокочастотной (или коротковолновой) дифракции на выпуклых препятствиях. Основы данной теории были заложены Кирхгофом, поэтому она называется *физической теорией дифракции Кирхгофа*. Вначале мы представим эвристическую основу этой теории, а затем докажем ее асимптотический характер.

Существует несколько разных формулировок теории Кирхгофа [89], отличающихся мелкими деталями. Ключевые моменты понятны из рис. 2.6.

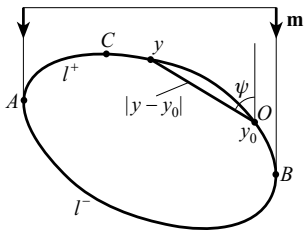


Рис. 2.6. Падение высокочастотной акустической волны на выпуклое препятствие

Если плоская акустическая волна $p^{\text{inc}}(x) = e^{ik(m \cdot x)}$ падает на выпуклое препятствие, то граница отражателя естественным образом делится на зоны «света» (l^+) и «тени» (l^-), которые для простоты показаны на рис. 2.6 для двумерного случая. Зона света l^+ определяется как содержащая точки границы с $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} < 0$, а зона тени l^- — как содержащая точки границы с $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} > 0$, где \mathbf{n} — внешняя нор-

маль к контуру отражателя и \mathbf{m} — единичный вектор, определяющий направление падающей волны. Структура решения полностью отличается в зонах света и тени. Асимптотически, при $k \rightarrow \infty$, полное давление $p(x) = p^{\text{inc}}(x) + p^{\text{sc}}(x)$ в зоне тени $p(x) = 0$, $x \in l^-$. Решение на l^+ — более сложное. Идея Кирхгофа основана на эвристическом предположении, что на высоких частотах в окрестности любой точки $x_0 \in l^+$ поверхность можно считать локально плоской и, таким образом, $p(x_0)$ может быть асимптотически получено из решения задачи отражения плоской падающей волны $p^{\text{inc}}(x)$ от плоскости, касательной к граничному контуру в точке x_0 . Для большей определенности предположим, что контур l — акустически твердый: $(\partial p / \partial n)|_l = 0$, где $p = p^{\text{inc}} + p^{\text{sc}}$ — полное акустическое волновое поле. Тогда решение проблемы отражения от бесконечного плоского отражателя строится довольно просто [10]. Легко проверить, что полное волновое поле

$$p_\infty(x) = e^{ik(m \cdot x)} + p_\infty^{\text{sc}}(x) = e^{ik(m \cdot x)} + e^{ik[m - 2(m \cdot n)] \cdot x}, \quad (2.111)$$

если оси локальной прямоугольной системы координат совпадают с направлениями (τ, n) (τ — единичный вектор касательной, n — внешняя единичная нормаль) и начало координат находится в точке $x_0 = 0$.

Из (2.111) видно, что

$$p_\infty(x_0) = p_\infty(0) = 2 = 2p^{\text{inc}}(0) = 2p^{\text{inc}}(x_0), \quad (2.112)$$

поэтому из аппроксимации Кирхгофа следует

$$p(x_0) \approx 2p^{\text{inc}}(x_0), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.113)$$

Интегральное представление Кирхгофа–Гельмгольца (2.43) с приближением Кирхгофа (2.113) теперь содержит две известные функции $p|_l$ и $(\partial p / \partial n)|_l$, и задача дифракции теперь сводится к вычислению некоторых квадратур.

Долгое время велись горячие споры о том, является ли данная теория асимптотической при $k \rightarrow \infty$ или же нет. Недавно было доказано, что главный асимптотический член точного решения совпадает с гипотезой Кирхгофа (см., например, [50]), однако доказательство этого факта требует слишком абстрактного математического аппарата. Здесь мы дадим простое и наглядное доказательство. Оно опирается на основное граничное интегральное уравнение (см. раздел 2.2). Единственным ограничением является установленный факт, что изученные ГИУ однозначно разрешимы для всех $k > 0$, за исключением счетного набора значений $\{k_n\}$ ($k_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$), отвечающих собственным значениям соответствующей внутренней краевой задачи. Таким образом, строго говоря, асимптотическое свойство теории Кирхгофа, утверждаемое следующей теоремой, справедливо только для регулярных высокочастотных значений k . Для доказательства того, что решение Кирхгофа асимптотически обоснованно также и для нерегулярных значений k ($k \rightarrow \infty$), т. е. аппроксимация Кирхгофа представляет собой

главный асимптотический член решения для любого большого k , требуется более тонкий анализ. Предполагая, что $p(x_0) = o(1)$, $k \rightarrow \infty$, $x_0 \in l^-$, докажем следующее утверждение.

Теорема. Пусть граничный контур l будет гладким, выпуклым и акустически твердым и $x_0 \in l^+$. Тогда

$$p(x_0) = 2p^{\text{inc}}(x_0) + o(1), \quad k \rightarrow \infty \quad (k \neq k_n). \quad (2.114)$$

Доказательство. Если $k \neq k_n$, то граничное интегральное уравнение в случае граничных условий Неймана $(\partial p / \partial n) = 0$, $x \rightarrow l$, и $p(x_0) \equiv 0(1)$, $k \rightarrow \infty$, асимптотически эквивалентно уравнению

$$p(y_0) - 2 \int_{l^+} p(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y = 2p^{\text{inc}}(y_0) + o(1), \quad y_0 \in l^+, \quad (2.115)$$

которое однозначно разрешимо. Здесь $\Phi(r) = (i/4)H_0^{(1)}(kr)$, $r = |y - y_0|$, — функция Грина для полного двумерного пространства. Более того, для рассматриваемых k интегральный оператор $I - G$ в левой части имеет обратный непрерывный оператор $(I - G)^{-1}$ в банаховом пространстве $C(l)$.

Пусть $p(y) = 2p^{\text{inc}}(y) + \varphi(y)$, $y \in l^+$, где $\varphi(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда уравнение (2.115) принимает вид ($y_0 \in l$)

$$\varphi(y_0) - 2 \int_{l^+} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y = 4 \int_{l^+} p^{\text{inc}} \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y + o(1). \quad (2.116)$$

Докажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{l^+} p^{\text{inc}}(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y = o(1), \quad y_0 \in l^+ = AB, \quad k \neq k_n. \quad (2.117)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{l^+} p^{\text{inc}}(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y &= \\ &= \int_{l^+ \setminus l_\varepsilon^\circ} p^{\text{inc}}(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y + \int_{l_\varepsilon^\circ} p^{\text{inc}}(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y, \end{aligned} \quad (2.118)$$

где l_ε° — малая ε -окрестность точки x_0 . Так как подынтегральная функция непрерывна (см. раздел 2.1), то второй интеграл в правой части здесь можно сделать сколь угодно малым.

Далее

$$\Phi(|y_0 - y|) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|y_0 - y|) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad r = |y_0 - y|, \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial n_y} &= -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n_y} = \\ &= -\frac{ik}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} \cos(r, n_y) \left[1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right],\end{aligned}$$

и это представление может быть использовано при оценке первого интеграла в правой части (2.118). Отсюда

$$\begin{aligned}I &= \int_{l^+} p^{\text{inc}}(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y = e^{-3\pi i/4} \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \int_{l^+ \setminus l_\varepsilon^0} e^{ik(m \cdot y + |y - y_0|)} \cos(y - y_0, n_y) \frac{dl_y}{\sqrt{|y_0 - y|}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad (2.120)\end{aligned}$$

так как подынтегральное выражение интегрируемо, и, таким образом, вклад интеграла по l_ε^0 мал.

Для того чтобы оценить (2.120), необходимо изучить поведение фазовой функции (см. метод стационарной фазы в разделе 1.4)

$$S(y) = (m \cdot y) + |y - y_0|, \quad (2.121)$$

так как любая стационарная точка дает вклад порядка $O(1/\sqrt{k})$, который приведет к тому, что I не будет мал. В случае отсутствия стационарных точек интеграл по l^+ имеет порядок $O(1/k)$, так что I станет асимптотически мал.

Разобьем интеграл (2.120) на три части (см. рис. 2.6): $\int_{l^+} = \int_0^C + \int_C^A + \int_A^B$, где точка $O = y_0$ — центр выбранной прямоугольной системы координат; A и B — точки, отделяющие зону света l^+ от теневой зоны l^- ; C — ближайшая точка контура в направлении навстречу падающей волне. Очевидно, что фаза $S(y) = (m \cdot y) + |y|$ монотонно возрастает на дугах CA и OB , так как оба слагаемых возрастают. Следовательно, стационарная точка отсутствует. Напротив, когда $y \in OC$, первое слагаемое убывает а второе возрастает; таким образом, строго говоря, существует возможность появления стационарной точки y^* на дуге OC . На этой дуге фаза S представляется в виде

$$S(y) = (m \cdot y) + |y| = -|y| \cos \psi + |y| = |y|(1 - \cos \psi), \quad (2.122)$$

где ψ — угол между вектором $Oy = y$ и направлением на падающую волну: $\psi = \widehat{y, -\mathbf{m}}$. Ясно, что $\psi(y)$ — монотонно возрастающая функция при $y \in OC$ и $0 \leq \psi \leq \pi$. Так как $\cos \psi$ в данной области изменения ψ есть убывающая функция аргумента ψ , то $\cos \psi$ убывает монотонно, а $(1 - \cos \psi)$ монотонно возрастает. Поскольку $S(y)$ — это произведение двух положительных монотонно возрастающих функций $|y|$ и $[1 - \cos \psi(y)]$, то она также монотонно возрастает и потому на дуге OC

не существует стационарной точки. Это доказывает, что интеграл I в уравнении (2.120) допускает оценку $I = O[\sqrt{k}(1/k)] = O(1/\sqrt{k})$, $k \rightarrow \infty$, равномерную на $y_0 \in l^+$, т. е. уравнение (2.116) может быть переписано в виде

$$\varphi(y_0) - 2 \int_{l^+} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(|y_0 - y|)}{\partial n_y} dl_y = f(y_0), \quad y_0 \in l^+, \quad (2.123)$$

$$f(y_0) = 4I(y_0) + o(1) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + o(1) = o(1). \quad (2.124)$$

В завершение доказательства используем обратимость интегрального оператора в левой части уравнения (2.123), а также то, что правая часть асимптотически мала равномерно на $y_0 \in l^+$. Получение точных асимптотических оценок здесь не так просто. Подробный анализ остатка изложен в книге [50].

Пример. Высокочастотная диаграмма рассеяния на круглом диске. Пусть плоская акустическая волна $p^{\text{inc}} = e^{ikx_1}$ падает на акустически твердый диск радиуса a (двумерная задача). Как следует из уравнения (2.104), при рассмотрении рассеяния в дальней зоне с точкой наблюдения $x = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ имеем

$$|p^{\text{sc}}| \sim \sqrt{\frac{k}{|x|}} \left| \int_l p(y) \cos(n_y, x) e^{-ik(x \cdot y)/|x|} dl_y \right|. \quad (2.125)$$

Заменим в данном интеграле граничное значение полного акустического давления на предсказываемое теорией Кирхгофа и заметим, что

$$\begin{aligned} p(y) &= p(\psi) = 2p^{\text{inc}} = 2e^{ika \cos \psi}, \quad \frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3}{2}\pi, \\ p(\psi) &= 0, \quad |\psi| < \frac{\pi}{2}, \quad y = (a \cos \psi, a \sin \psi). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Вспомним также (см. раздел 2.5), что $\cos(\widehat{n_y, x}) = \cos(\psi - \alpha)$, $(x \cdot y)/|x| = a \cos(\psi - \alpha)$, так что уравнение (2.125) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} |p^{\text{sc}}(\alpha)| &\sim \sqrt{\frac{k}{|x|}} \left| 2a \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\psi - \alpha) e^{ika \cos \psi} e^{-ika \cos(\psi - \alpha)} d\psi \right| = \\ &= 2a \sqrt{\frac{k}{|x|}} \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\psi - \alpha) e^{-2ika \sin(\alpha/2) \sin(\psi - \alpha/2)} d\psi \right|. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Будем вычислять интеграл (2.127) методом стационарной фазы. Если $ka \gg 1$, то фаза $S(\psi) = -2a \sin(\alpha/2) \sin(\psi - \alpha/2)$ имеет единствен-

ную стационарную точку $\psi = (\pi + \alpha)/2$ на интервале $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$ для любого $0 < \alpha \leq \pi$. Более того, $S(\psi^*) = -2a \sin(\alpha/2)$, $\cos(\psi^* - \alpha) = \sin(\alpha/2)$, $S''(\psi^*) = 2a \sin(\alpha/2)$, так что метод стационарной фазы (раздел 1.4) приводит к следующему асимптотическому представлению для $|p^{sc}(\alpha)|$:

$$|p^{sc}(\alpha)| \sim 2a \sqrt{\frac{k}{|x|}} A(\alpha) \quad (0 < \alpha \leq \pi), \quad A(\alpha) \sim \frac{|\sin(\alpha/2)|}{ak}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.128)$$

Вследствие очевидной четности данная формула может быть симметрично доопределена на интервале $-\pi \leq \alpha < 0$.

Единственная область, где представление (2.128) недействительно, относится к случаю, когда аргумент показательной функции в (2.127) невелик для большого ka . Это происходит при $ka \sin(\alpha/2) = O(1)$, т. е. когда $\alpha = O(1/ka)$, $k \rightarrow \infty$. Однако в этом специальном случае допустимо другое представление интеграла (2.127):

$$\begin{aligned} |p^{sc}(\alpha)| &\sim 2a \sqrt{\frac{k}{|x|}} \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \psi e^{-2ika \sin(\alpha/2) \sin \psi} d\psi \right| = \\ &= 2a \sqrt{\frac{k}{|x|}} \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2ika \sin(\alpha/2) \sin \psi} d(\sin \psi) \right| = 2a \sqrt{\frac{k}{|x|}} \frac{\sin[2ka \sin(\alpha/2)]}{2ka \sin(\alpha/2)}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Отсюда следует, что

$$A(\alpha) = \frac{\sin[2ka \sin(\alpha/2)]}{2ka \sin(\alpha/2)}. \quad (2.130)$$

Как видим, $A(\alpha) = 1$ для $\alpha = 0$, а вне малой окрестности значения $\alpha = 0$ диаграмма рассеяния уменьшается и становится сильноосциллирующей функцией с амплитудой порядка $O(1/k)$. Этот резкий пик в направлении падающей волны называется *тенеобразующим лепестком*.

Примечания

1. Очевидно, основная идея теории Кирхгофа может быть легко распространена на неплоскую падающую волну, так как любая волна на высокой частоте может локально рассматриваться как плоская.

2. Возникают два весьма важных и интересных вопроса: 1) почему доказанная теорема требует выпуклости границы? и 2) почему те же самые доказательства нельзя применить для $x_0 \in l^-$? В самом деле, оба условия о выпуклости и о принадлежности точки x_0 к освещенной части границы существенны. Мы можем гарантировать, что угол $\psi(y)$ монотонно возрастает вдоль дуги x_0C только для выпуклой геометрии. С другой стороны, если провести анализ, схожий с выполненным

в теореме для случая $x_0 \in l^-$, то можно увидеть, что $\psi(y)$ монотонно убывает, поэтому $-\cos \psi$ ($0 < \psi < 180^\circ$) — несомненно, монотонно убывающая функция. Следовательно, фаза $S(y) = |y| - |y| \cos \psi$ есть сумма монотонно возрастающей ($|y|$) и монотонно убывающей функций. Поэтому возможно существование стационарной точки, в которой $S' = 0$. Эта особенность хорошо видна для примера с кругом радиуса a . Здесь $S(y) = S(\theta) = |y|[1 - \sin(\theta/2)] = 2a \sin(\theta/2)[1 - \sin(\theta/2)]$, при этом стационарная точка $\theta^* = 60^\circ$, как следует из уравнения $S'(\theta^*) = 0$.

Глава 3

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ В СЛОЕ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

3.1. Волновой оператор в акустическом слое

Настоящий раздел посвящен аналитическим свойствам волновых полей в акустическом слое постоянной толщины h . Так как ради простоты изложения будет рассматриваться лишь двумерная задача, мы также слегка изменим обозначения и выберем прямоугольную систему координат (x, y) так, чтобы ее горизонтальная ось совпадала с нижней границей слоя $y = 0$, а $y = h$ была верхней границей. Рассмотренная геометрия представляет класс задач, в которых ярко демонстрируется мощь преобразования Фурье (см. раздел 1.1).

Построим функцию Грина в рассматриваемом акустическом слое. Как было замечено в конце раздела 2.1, достаточно решить неоднородное уравнение Гельмгольца с точечным источником, выраженным через дельта-функцию Дирака в правой части волнового уравнения и помещенным в точке (x_0, y_0) :

$$\Delta \Phi(x, y) + k^2 \Phi(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (3.1)$$

Применяя преобразование Фурье по переменной x , используя соотношение (1.3) и учитывая свойства дельта-функции (1.62), мы приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dy^2} \tilde{\Phi}(s, y) - (s^2 - k^2) \tilde{\Phi}(s, y) = e^{isx_0} \delta(y - y_0), \quad (3.2)$$

где s — параметр преобразования Фурье, а тильда обозначает образ Фурье искомой функции Грина. Решение этого уравнения может быть представлено как сумма общего решения однородного уравнения (3.2) и частного решения полного уравнения

$$\tilde{\Phi}(s, y) = A(s) e^{\gamma y} + B(s) e^{-\gamma y} + \tilde{\Phi}_{\text{part}}(s, y), \quad \gamma = \gamma(s) = \sqrt{s^2 - k^2}, \quad (3.3)$$

где $A(s)$ и $B(s)$ — две произвольные константы, которые обычно возникают при решении обыкновенных дифференциальных уравнений (в данном случае второго порядка).

Для нахождения $\tilde{\Phi}_{\text{part}}$ заметим, что оно может быть выбрано как частное решение для всего пространства \mathbb{R}^2 , т.е. может не удовлетворять граничным условиям на лицевых границах слоя. Поэтому

применим снова преобразование Фурье к уравнению (3.2), в этот раз по y . Тогда получаем

$$\tilde{\Phi}_{\text{part}}^*(s, \alpha) = \frac{e^{i(sx_0 + \alpha y_0)}}{\alpha^2 + \gamma^2}, \quad (3.4)$$

где звездочка обозначает образ Фурье, взятый по переменной y . Теперь применение обратного преобразования к уравнению (3.4) по переменной α (см. формулу (1.20)) дает

$$\hat{\Phi}_{\text{part}}(s, y) = \frac{e^{isx_0}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(y_0 - y)}}{\alpha^2 + \gamma^2} d\alpha = \frac{e^{isx_0} e^{-|y_0 - y|\gamma}}{2\gamma}. \quad (3.5)$$

Следовательно, общее решение (3.3) принимает вид

$$\tilde{\Phi}(s, y) = A(s) e^{\gamma y} + B(s) e^{-\gamma y} + \frac{e^{isx_0} e^{-|y_0 - y|\gamma}}{2\gamma}. \quad (3.6)$$

Теперь функции A и B должны быть определены из граничных условий на поверхностях слоя $y = 0$ и $y = h$. Эти условия могут быть разных типов, и мы приведем ниже наиболее важные случаи с соответствующими решениями. Решение определяется обратным преобразованием Фурье и имеет следующий вид:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s, y) e^{-is(x - x_0)} ds. \quad (3.7)$$

1. Акустический слой заключен между двумя жесткими плитами. Тогда обе граничные поверхности акустически твердые, следовательно граничные условия и соответствующая функция $L(s, y)$ представляются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0, \\ L_1(s, y) = \frac{\text{ch}[\gamma(h - |y - y_0|)] + \text{ch}[\gamma(h - y - y_0)]}{2\gamma \text{sh}(\gamma h)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

2. Обе граничные плоскости свободны от приложенной нагрузки. Тогда

$$\begin{aligned} p|_{y=0} = 0, \quad p|_{y=h} = 0, \\ L_2(s, y) = \frac{\text{ch}[\gamma(h - |y - y_0|)] - \text{ch}[\gamma(h - y - y_0)]}{2\gamma \text{sh}(\gamma h)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3. Одна граница слоя находится в контакте с акустически твердой плитой, а другая свободна от приложенного давления. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad p|_{y=h} = 0, \\ L_3(s, y) = \frac{\text{sh}[\gamma(h - |y - y_0|)] + \text{sh}[\gamma(h - y - y_0)]}{2\gamma \text{ch}(\gamma h)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Какой вывод можно сделать из этих выражений? Как можно заметить, в данных структурах представлена ветвящаяся функция $\gamma(s)$ (ср. раздел 1.1). Тем не менее наиболее важный вывод состоит в том, что все эти функции $L(s, y)$ мероморфны относительно s . Это значит, что они аналитичны, так как их ряды Лорана в точке ветвления $s = \pm k$ содержат только четные степени γ (ср. (1.18)) и они могут иметь не более чем счетное множество полюсов.

Заметим, что полюсы приведенных функций (3.8)–(3.10) могут быть выражены явно. Они совпадают с нулями соответствующих гиперболических синуса и косинуса в знаменателях и даются выражениями

$$\begin{aligned} \gamma \operatorname{sh}(\gamma h) = 0 &\sim s = \pm s_m^{(1,2)}, \\ s_m^{(1,2)} &= \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2} = i\sqrt{\left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 - k^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

в первых двух случаях и

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\gamma h) = 0 &\sim s = \pm s_m^{(3)}, \\ s_m^{(3)} &= \sqrt{k^2 - \left[\frac{\pi(m+1/2)}{h}\right]^2} = i\sqrt{\left[\frac{\pi(m+1/2)}{h}\right]^2 - k^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.12)$$

в третьем случае.

Очевидно, что для относительно низких частот (малые значения волнового числа k и $m \neq 0$ в первых двух задачах) вещественных полюсов нет и, следовательно, все особенности лежат вне контура интегрирования. Тем не менее с ростом частоты все больше и больше вещественных полюсов попадает на действительную ось $\operatorname{Im}(s) = 0$. Возникает естественный вопрос: в каком смысле интеграл типа (3.7) должен корректно трактоваться в случае, когда полюсы мероморфного подынтегрального выражения попадают на контур интегрирования?

В следующем разделе будет показано, что путь интегрирования должен слегка огибать положительные полюсы снизу и отрицательные сверху. Тогда можно применить интегрирование по вычетам в простых полюсах s_n , расположенных в верхней комплексной полуплоскости (см. обобщенную лемму Жордана в заключительном примере в разделе 1.1). Для того чтобы можно было деформировать контур интегрирования в верхней полуплоскости (что наиболее часто применяется в литературе) вместо нижней полуплоскости, заметим, что все функции $L(s, y)$ в (3.8)–(3.10) — четные относительно s и, следовательно, можно вписать положительный аргумент $is|x - x_0|$ экспоненциальной функции в уравнение (3.7) вместо отрицательного $-is|x - x_0|$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s, y) e^{is|x-x_0|} ds = \frac{2\pi i}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Res} [L(s, y) e^{is|x-x_0|}, is_m]. \quad (3.13)$$

Это приводит к следующим представлениям:

$$\begin{aligned}\Phi^{(1,2)}(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[\pi m|y - y_0|/h] \pm \cos[\pi m(y + y_0)/h]}{2\sqrt{(\pi m)^2 - (kh)^2}} (-1)^m e^{is_m^{(1,2)}|x - x_0|}, \\ \Phi^{(3)}(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[\pi(m + 1/2)|y - y_0|/h] + \sin[\pi(m + 1/2)(y + y_0)/h]}{2\sqrt{\pi(m + 1/2)^2 - (kh)^2}} \times \\ &\quad \times (-1)^m e^{is_m^{(3)}|x - x_0|}, \quad (3.14)\end{aligned}$$

которые называются *разложением по модам*. Структура, обладающая модовыми решениями, называется *волноводом*. Таким образом, можно заключить, что слой постоянной толщины представляет собой типичный волновод.

Из разложений (3.14) и уравнений (3.11), (3.12) ясно, что если частота меньше определенной положительной величины, то в слое могут существовать лишь волны, экспоненциально затухающие с расстоянием $|x - x_0|$ (за исключением тех, у которых $m = 0$ в симметричных случаях 1 и 2; см. (3.11)). Такие затухающие волны называются *неоднородными волновыми модами*. В противном случае, если волновое число достаточно велико, существует конечное число волн, которые могут распространяться далеко вдоль длины слоя. Такие незатухающие волны называются *однородными волновыми модами*. Если выписать их в полной форме вместе с зависящим от времени множителем, то они принимают вид неких плоских волн с амплитудой, зависящей от y :

$$\Phi(x, y, t) = A(y) e^{i(s_m |x - x_0| - \omega t)}, \quad (3.15)$$

где $s_m = s_m^{(1,2)}$ или $s_m = s_m^{(3)}$, с некоторой скоростью распространения, которая для m -й моды равна $v_f = \omega/s_m$:

$$\begin{aligned}v_f^{(1,2)} &= \frac{\omega}{s_m^{(1,2)}} = c \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\pi m c}{\omega h} \right)^2} \right]^{-1}, \\ v_f^{(3)} &= \frac{\omega}{s_m^{(3)}} = c \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\pi(m + 1/2) c}{\omega h} \right)^2} \right]^{-1}.\end{aligned} \quad (3.16)$$

Данная величина называется *фазовой скоростью* m -й моды. Ясно, что фазовая скорость всегда больше скорости волны в среде: $v_f \geq c$. Только в симметричных случаях, когда $m = 0$, фазовая скорость равна c : $v_f^{(1,2)} = c$ ($m = 0$).

Заметим также, что все построенные модовые решения удовлетворяют условию излучения, поскольку при $x \rightarrow +\infty$ они ведут себя как волны, излучаемые вправо, и при $x \rightarrow -\infty$ — как излучаемые влево:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, t) &= B(y) e^{i(s_m x - \omega t)}, \quad x \rightarrow +\infty, \\ \Phi(x, y, t) &= D(y) e^{-i(s_m x + \omega t)}, \quad x \rightarrow -\infty,\end{aligned} \quad (3.17)$$

что непосредственно видно из рассмотрения соответствующего волнового фронта (ср. раздел 1.9).

Примечания

1. Существует устоявшееся мнение, что волновые задачи в закрытых структурах, таких как слои (возможно, с некоторыми неоднородностями), могут генерировать только мероморфные символические функции $L(s, y)$, а те же задачи в открытых структурах (например, в полуплоскости, возможно, содержащей некоторые неоднородности) всегда приводят только к определенным функциям с точками ветвления. Неизвестно, было ли данное утверждение где-либо строго доказано, однако мы не знаем ни одного примера, который опровергал бы данное утверждение.

2. В мощи методов теории комплексных аналитических функций (см. раздел 1.1) можно убедиться на примере задачи, изученной в этом разделе. Явная форма решения сначала была получена как интеграл Фурье, численная реализация которого достаточно сложна, так как подынтегральная функция быстро осциллирует и имеет некоторые особенности (полюсы) на вещественной оси. Кроме того, отрезок интегрирования бесконечен. Применяя теорию вычетов вместе с леммой Жордана, мы свели данный интеграл к эквивалентной форме, представленной экспоненциально сходящимся рядом, что упрощает вычисление решения.

3.2. Принципы выбора единственного решения

Вполне естественно, что при решении волнового уравнения (или уравнения Гельмгольца) в любой неограниченной области необходимо установить некоторые граничные условия на бесконечности, для того чтобы выбрать единственное решение. Ранее мы уже вывели условие излучения в разделе 2.2, когда изучали внешнюю задачу дифракции в полном неограниченном пространстве \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$), но оно еще не было сформулировано как строго математическое условие.

3.2.1. Условие излучения Зоммерфельда. В литературе общепризнанно, что математически корректная форма условия излучения, где зависящий от времени множитель взят в виде $\exp(-i\omega t)$, определяется следующей парой асимптотических тождеств:

$$p(x) = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial R} - ikp = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad R = |x| \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

в трехмерном случае и

$$p(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial R} - ikp = o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \quad R = |x| \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

в двумерном случае.

В самом деле, если эти два условия выполняются, тогда, используя формулу Грина, как в разделе 2.2, легко доказать, что (2.49) верно и, следовательно, формула Кирхгофа–Гельмгольца (2.43) определяет

единственное решение внешней задачи дифракции. Данный вывод основан на очевидных оценках, справедливых для обеих функций $u(y)$ и $\Phi(|x - y|)$, удовлетворяющих условиям (3.19), так как в рассматриваемом двумерном случае

$$\begin{aligned} u(y) \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} &= u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial R_y} - \Phi \frac{\partial u}{\partial R_y} = \\ &= u(y) \left[ik\Phi + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \right] - \Phi \left[iku + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \right] = o\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

и поэтому

$$\int_{l_R} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(|x - y|)}{\partial n_y} - \Phi(|x - y|) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dl_y \sim 2\pi R o\left(\frac{1}{R}\right) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

К сожалению, нельзя гарантировать, что условия (3.18), (3.19) универсальны в том смысле, что они обеспечивают выбор единственного решения для произвольной неограниченной области, отличной от всего пространства. На практике неясно, как можно свести интегральные представления к модовому решению (3.7)–(3.10) в слое, когда подынтегральная функция имеет простые полюсы на вещественной оси.

Начинающий исследователь может попробовать трактовать решение (3.7) в слое в случае, когда на вещественной оси имеется конечное число простых полюсов, как сингулярное главное значение типа Коши (см. раздел 1.7). Тогда точное выражение (3.7) может быть снова вычислено добавлением (в верхней полуплоскости) полукруга большого радиуса R , для того чтобы провести интегрирование по замкнутому контуру. Далее, применяя обобщенную лемму Жордана (раздел 1.1) и граничные значения сингулярных интегралов типа Коши от аналитических функций (1.155), можно прийти к выводу, что функция $\Phi(x, y)$ в (3.7)

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s, y) e^{is|x-x_0|} ds = i \sum \text{Res} [L(s, y) e^{is|x-x_0|}, is_m] + \\ &+ \frac{i}{2} \sum_{m \leq N^*} \text{Res} [L(s, y) e^{is|x-x_0|}, s_m] + \frac{i}{2} \sum_{m \leq N^*} \text{Res} [L(s, y) e^{is|x-x_0|}, -s_m], \end{aligned} \quad (3.22)$$

где первая сумма взята по всем мнимым полюсам в верхней комплексной полуплоскости, вторая сумма относится к N^* положительным полюсам, а третья — к N^* отрицательным полюсам.

Теперь становится ясным, что первая сумма содержит неоднородные волновые моды, затухающие с расстоянием, вторая содержит однородные волны, удовлетворяющие условиям излучения Зоммерфельда, а третья генерирует однородные волны, которые противоречат условиям

излучения. Следовательно, интеграл (3.7) нельзя рассматривать как главное значение типа Коши.

Правильный подход должен основываться на очевидном наблюдении, что вычеты в положительных полюсах вычисляются в соответствии с условиями излучения, а вычеты в отрицательных полюсах дают волновые моды, приходящие из бесконечности, в противоречии с принципом Зоммерфельда. Это приводит к ясному пониманию того, что при расположении большого замкнутого полукруга в верхней комплексной полуплоскости все отрицательные полюсы должны быть вне этого круга, а все положительные могут находиться внутри него. Естественная симметрия в расположении полюсов (даже в подынтегральном выражении!) позволяет прийти к следующему выводу: для того чтобы удовлетворить условиям излучения Зоммерфельда, интегрируемый контур должен слегка огибать положительные полюсы снизу и отрицательные сверху.

Для установления более физически обоснованного принципа выбора единственного решения некоторые авторы предлагают альтернативные условия на бесконечности, и весьма интересно, какова степень их соответствия условиям излучения.

3.2.2. Принцип предельного поглощения (принцип Игнатовского). Данный принцип естественным образом возникает в электромагнитной теории (см. раздел 1.9). Если в уравнении (1.219) параметр σ является малой положительной постоянной ($0 < \sigma \ll 1$), то волновое число $\tilde{k} = k + i\delta$, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}/c$, $\delta = \sqrt{\omega\sigma}/(2c)$, $0 < \delta \ll 1$, есть комплексная величина с положительной мнимой частью. Тогда конечное число простых полюсов s_n , $n = 1, 2, \dots, N^*$ в уравнениях (3.11), (3.12), которые были вещественными для действительного k , становятся комплексными и немного сдвигаются с вещественной оси. Более того, положительные полюсы сдвигаются слегка вверх, а отрицательные — немного вниз, так что все волновые моды (3.13) убывают с расстоянием вследствие поглощения. Принцип предельного поглощения (впервые предложенный Игнатовским [53]) утверждает, что истинное решение задачи в идеальной (т. е. непоглощающей) среде равно пределу соответствующего решения в поглощающей среде при $\delta \rightarrow +0$.

В идеальных средах для задач гидроакустики и теории упругости, где отсутствует параметр σ , также можно использовать данный принцип, искусственно вводя добавочное поглощение, которое в конечной структуре решения должно быть положено равным нулю. Для задачи из предыдущего раздела этот принцип приведет к тому же решению, что и при условиях излучения. В самом деле, если с малым поглощением положительные полюсы сдвигаются вверх, а отрицательные вниз, то обычный контур интегрирования $(-\infty, \infty)$ обратного преобразования Фурье проходит ниже положительных полюсов и выше отрицательных. При поглощении, стремящемся к нулю, это приводит к тому же относительно расположению, что и в принципе Зоммерфельда.

3.2.3. Энергетическое условие излучения (принцип Мандельштама). Данный принцип утверждает, что поток энергии, взятый за период колебаний и вытекающий наружу через определенное поперечное сечение области, должен быть положительным. Вычислим поток энергии через вертикальное поперечное сечение слоя $x = x^*$. Для этого сначала выведем общую формулу для мощности W , усредненной за период колебаний и рассматриваемой по малой площадке с нормалью \mathbf{n} :

$$W = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p v_n dt. \quad (3.23)$$

Имеем

$$\begin{aligned} p(x, y, t) &= \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} \tilde{p}(x, y)] = \tilde{p}^{\text{re}} \cos \omega t + \tilde{p}^{\text{im}} \sin \omega t, \\ \frac{\partial v_n(x, y, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} (\operatorname{grad} p)_n \sim \\ &\sim \frac{\partial v_n}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tilde{p}^{\text{re}}}{\partial n} \cos \omega t + \frac{\partial \tilde{p}^{\text{im}}}{\partial n} \sin \omega t \right) \sim \\ &\sim v_n = \frac{1}{\rho_0 \omega} \left(-\frac{\partial \tilde{p}^{\text{re}}}{\partial n} \sin \omega t + \frac{\partial \tilde{p}^{\text{im}}}{\partial n} \cos \omega t \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

таким образом, подстановка соотношений (3.24) в (3.23) и последующее интегрирование определяют усредненную энергию в виде

$$W = \frac{1}{2\rho_0 \omega} \left(\tilde{p}^{\text{re}} \frac{\partial \tilde{p}^{\text{im}}}{\partial n} - \tilde{p}^{\text{im}} \frac{\partial \tilde{p}^{\text{re}}}{\partial n} \right). \quad (3.25)$$

С другой стороны, если мы работаем в гармоническом режиме со стандартным представлением, выраженным в терминах комплексных амплитуд для соответствующих функций, а именно

$$p(x, y, t) = e^{-i\omega t} \tilde{p}(x, y), \quad \mathbf{v}(x, y, t) = e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{v}}(x, y), \quad \tilde{v}_n = \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n}, \quad (3.26)$$

тогда (здесь звездочкой отмечено комплексное сопряжение)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (\tilde{p}^* \tilde{v}_n) &= \operatorname{Re} \left[(\tilde{p}^{\text{re}} - i\tilde{p}^{\text{im}}) \frac{1}{i\omega \rho_0} \left(\frac{\partial \tilde{p}^{\text{re}}}{\partial n} + i \frac{\partial \tilde{p}^{\text{im}}}{\partial n} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\omega \rho_0} \left(\tilde{p}^{\text{re}} \frac{\partial \tilde{p}^{\text{im}}}{\partial n} - \tilde{p}^{\text{im}} \frac{\partial \tilde{p}^{\text{re}}}{\partial n} \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

отсюда

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\tilde{p}^* \tilde{v}_n) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\tilde{p} \tilde{v}_n^*). \quad (3.28)$$

Формула (3.28) позволяет вычислить поток энергии через поперечное сечение $x = x^* > x_0$ за период, взятый как вклад m -й однородной

моды. Для большей определенности рассмотрим только случаи 1 и 2 (далее тильды опущены):

$$p = \frac{\cos[\pi m|y - y_0|/h] \pm \cos[\pi m(y + y_0)/h]}{-2i\sqrt{(kh)^2 - (\pi m)^2}} e^{is_m(x-x_0)}, \quad (3.29)$$

$$v_n = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\cos[\pi m|y - y_0|/h] \pm \cos[\pi m(y + y_0)/h]}{-2i\omega\rho_0\sqrt{(kh)^2 - (\pi m)^2}} s_m e^{is_m(x-x_0)},$$

$$s_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2} > 0 \quad (m = 1, \dots, N^*),$$

поэтому

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^h p^* v_n dy = \frac{B s_m}{8\omega\rho_0[(kh)^2 - (\pi n)^2]} > 0, \quad (3.30)$$

так как

$$B = \int_0^h \{\cos[\pi|y - y_0|/h] \pm \cos[\pi n(y + y_0)/h]\}^2 dy > 0. \quad (3.31)$$

Таким образом, поток энергии действительно оказался положительным. Случай $x = x^* < x_0$ может быть доказан аналогичным образом.

Следовательно, построенное решение удовлетворяет энергетическому принципу излучения Мандельштама. В этом смысле оба условия излучения Зоммерфельда и Мандельштама дают эквивалентные формулировки граничных условий на бесконечности.

3.2.4. Принцип предельно большого времени (принцип Тихонова–Самарского). Этот принцип утверждает что любая гармоническая во времени задача, где $p(x, y, t) = e^{-i\omega t} \tilde{p}(x, y)$ и

$$\Delta \tilde{p} + k^2 \tilde{p} = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (3.32)$$

т.е. дифференциальное уравнение в частных производных эллиптического типа, которая, таким образом, не требует начальных условий, может быть сформулирована в нестационарном режиме:

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) e^{-i\omega t} \quad (3.33)$$

как нестационарная задача с нулевыми начальными условиями

$$p(x, y, 0) = \frac{\partial p(x, y, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.34)$$

Эта новая задача Коши при определенных условиях имеет единственное решение. Тогда асимптотика данного нестационарного решения $p(x, y, t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяет истинное решение монохроматической задачи. Некоторые статьи посвящены выяснению взаимоотношений между данным принципом и условием излучения Зоммерфельда [53]. Мы же обратим внимание на то, что данный принцип сложно

применять на практике. Решение возникающей нестационарной задачи сложнее исходной, так как размерность новой задачи увеличивается на единицу из-за введения новой переменной t .

Примечания

1. Если внимательно посмотреть на описанные принципы, то можно прийти к следующим выводам.

Принципы Зоммерфельда и Мандельштама дают истинные условия на бесконечности в случае полного акустического пространства или акустического слоя постоянной толщины. Не вполне ясно, как применять их в более общих случаях.

Принципы Игнатовского и Тихонова–Самарского более общие; они дают конкретные алгоритмы построения искомого решения. Тем не менее принцип Тихонова–Самарского тяжел в реализации.

Таким образом, мы советуем всегда оперировать принципом предельного поглощения.

2. Между тем возникает естественный вопрос: известна ли какая-либо задача, где описанные принципы могут привести к разным результатам?

Для того чтобы выяснить это, перепишем в случае скалярной акустики полученную формулу для потока энергии (3.28) начиная с определяющих уравнений. Рассмотрим $x > x_0$. Тогда очевидно, что построенное решение дает нетривиальное решение для любого модового числа m

$$p(x, y) = p_m(y) e^{is(x-x_0)}, \quad s = s_m > 0, \quad (3.35)$$

в однородной краевой задаче для уравнения (3.1), так как правая часть здесь исчезает при $x > x_0$. Переформулировав его для функции $p_m(y)$, получим нетривиальное решение однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$p_m''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - s^2 \right) p_m(y) = 0 \quad (3.36)$$

с определенным типом однородных граничных условий:

$$\begin{aligned} 1) \quad & p_m'(0) = p_m'(h) = 0; \\ 2) \quad & p_m(0) = p_m(h) = 0; \\ 3) \quad & p_m'(0) = 0, \quad p_m(h) = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Продифференцируем уравнение (3.35) по переменной s , принимая во внимание, что $s = s_m(\omega) \sim \omega = \omega(s)$ и $p_m(y) = p_m(y, s)$:

$$g''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - s^2 \right) g(y) = 2 \left(s - \frac{\omega}{c^2} \frac{d\omega}{ds} \right) p_m(y), \quad (3.38)$$

где мы использовали обозначение $g(y) = dp_m/ds$.

Дифференцирование граничных условий (3.37) дает:

$$\begin{aligned} 1) \quad & g'(0) = g'(h) = 0; \\ 2) \quad & g(0) = g(h) = 0; \\ 3) \quad & g'(0) = 0, \quad g(h) = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Теперь умножим скалярно уравнение, сопряженное с (3.36), на функцию $g(y)$ на интервале $0 \leq y \leq h$ и аналогично уравнение (3.38) на функцию $p_m^*(y)$ и вычислим разность двух полученных соотношений:

$$\int_0^h [g''(y) p_m^*(y) - p_m^{*''}(y) g(y)] dy = 2 \left(s - \frac{\omega}{c^2} \frac{d\omega}{ds} \right) \int_0^h p_m(y) p_m^*(y) dy. \quad (3.40)$$

Здесь мы рассматривали моды с положительным $s = s_m$ (так что $s^* = s$).

Легко видеть, что для любой пары граничных условий 1–3 в уравнениях (3.39) интегрирование по частям в первом интеграле (3.40) делает его нулевым. Это сразу же приводит к соотношению

$$s \int_0^h p_m(y) p_m^*(y) dy = \frac{\omega}{c^2} \frac{d\omega}{ds} \int_0^h |p_m(y)|^2 dy \quad (3.41)$$

и с учетом того, что

$$v_x(x, y) = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_x(x, y) = v_m(y) e^{is(x-x_0)} \sim v_m(y) = \frac{s}{\omega\rho_0} p_m(y), \quad (3.42)$$

равенство (3.41) окончательно дает

$$\begin{aligned} \omega\rho_0 \int_0^h v_m(y) p_m^*(y) dy &= \frac{\omega}{c^2} \frac{d\omega}{ds} \int_0^h |p_m(y)|^2 dy \sim \\ &\sim W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^h v_m p_m^* dy = \frac{1}{\rho c^2} \frac{d\omega}{ds} \int_0^h |p_m(y)|^2 dy. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Теперь ясно, что любая мода с вещественной фазовой скоростью (т. е. неубывающая волновая мода) дает положительный поток энергии тогда и только тогда, когда $d\omega/ds > 0 \sim ds/d\omega > 0$ для любого положительного $s(\omega)$.

Определение. Функция $s = s(\omega)$, определяющая зависимость фазовой скорости от частоты, называется **дисперсионной функцией**. Ее график в прямоугольной системе координат называется **дисперсионной кривой**.

В рассматриваемой задаче для скалярного акустического слоя (см. уравнения (3.11), (3.12)) имеем

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{\omega}{cs} > 0 \quad (s > 0). \quad (3.44)$$

Графически дисперсионная кривая показана на рис. 3.1, и, разумеется, она представляет собой монотонно возрастающую функцию, так что $ds/d\omega > 0$ для $s > 0$. Это снова доказывает, что все моды, распространяющиеся вправо с положительной фазовой скоростью и, таким образом, удовлетворяющие принципу излучения Зоммерфельда, обеспечивают также положительный поток энергии, т.е. они также удовлетворяют энергетическому принципу излучения Мандельштама. Попутно это доказывает, что контур интегрирования в (3.7) должен огибать положительные полюсы снизу, так что положительные полюсы лежат над контуром, и это приводит к тому, что волновые моды удовлетворяют обоим принципам. Вследствие явной симметрии схожий анализ распространения мод влево (т.е. $s < 0$) доказывает, что контур интегрирования в (3.7) должен огибать отрицательные полюсы сверху.

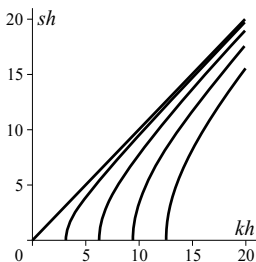


Рис. 3.1. Кривая дисперсии для скалярной акустической задачи

3. Из проведенного анализа ясно, что контур интегрирования, будучи симметричным относительно начала координат, должен проходить через него. Следовательно, все результаты, отмеченные выше, остаются справедливыми в случае, когда ни один из полюсов не попадает в начало координат. В противном случае мы имеем дело с так называемым *резонансным волновым процессом*; детальный анализ различных резонансных случаев как в акустической, так и в упругой теории представлен в [15]. Резонансные частоты для трех рассматриваемых скалярных задач могут быть найдены в явном виде

$$\begin{aligned} s_m^{(1,2)} &= 0, \quad \omega_m = \pi m \frac{c}{h}, \quad m = 1, 2, \dots, \\ s_m^{(3)} &= 0, \quad \omega_m = \pi(m + 1/2) \frac{c}{h}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

Возвращаясь к вопросу, сформулированному в примечании 2, в соответствии с формулой (3.43) можно ожидать, что подобный «нетипичный» режим с отрицательным потоком энергии может возникнуть в случае, когда $ds/d\omega < 0$ для положительного s . Рисунок 3.1 показывает, что для рассматриваемой геометрии скалярного акустического слоя постоянной толщины этого не может произойти никогда. Нам неизвестно ни одной скалярной акустической или векторной электромагнитной задачи с подобным свойством. Тем не менее Миндлин [104] впервые продемонстрировал, что условия излучения Зоммерфельда и энергетическое условие излучения могут противоречить друг другу в задаче для упругого слоя. Следующий раздел касается некоторых аспектов распространения волн в упругом слое.

3.3. Волны в упругом слое

Как следует из уравнений раздела 1.9, двумерная динамическая упругая задача (плоское деформированное состояние) описывается соотношениями

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, & u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \Delta \varphi + k_p^2 \varphi &= 0, & \Delta \psi + k_s^2 \psi &= 0, & k_p &= \frac{\omega}{c_p}, & k_s &= \frac{\omega}{c_s}, \\ \frac{\sigma_{xy}}{\rho c_s^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, & \frac{\sigma_{yy}}{\rho c_s^2} &= 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + k_s^2 \varphi, \\ \frac{\sigma_{xx}}{\rho c_s^2} &= 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + k_s^2 \varphi. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Здесь c_p, c_s — продольная и поперечная волновые скорости; $\{u_x(x, y), u_y(x, y)\}$ — компоненты вектора смещения; φ и ψ — потенциалы Ламе; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ — компоненты тензора напряжений; ρ — массовая плотность.

Количество всевозможных комбинаций граничных условий в данном случае больше, чем для акустического скалярного слоя. Для простоты мы рассмотрим только одну конкретную краевую задачу

$$\begin{aligned} y = 0: & \quad \sigma_{xy} = 0, \quad u_y = 0, \\ y = h: & \quad \sigma_{xy} = 0, \quad u_y = \delta(x - x_0), \end{aligned} \quad (3.47)$$

физический смысл которой в том, что подошва слоя (вдоль прямой $y = 0$) покоится на твердом основании без трения и верхняя поверхность слоя подвержена гармоническим колебаниям, которые вызваны осциллирующей сосредоточенной нормальной силой.

Применение преобразования Фурье по переменной x сводит уравнения Гельмгольца (3.46) к обыкновенным дифференциальным уравне-

ниям с постоянными коэффициентами, их решения в образах Фурье даются выражениями

$$\begin{aligned}\Phi &= A(s) \operatorname{ch}(\gamma y) + B(s) \operatorname{sh}(\gamma y), \quad \gamma = \sqrt{s^2 - k_p^2}, \\ \Psi &= C(s) \operatorname{ch}(qy) + D(s) \operatorname{sh}(qy), \quad q = \sqrt{s^2 - k_s^2},\end{aligned}\quad (3.48)$$

Граничные условия (3.47) для преобразования Фурье имеют вид (штрих обозначает производную по y)

$$\begin{aligned}-2is\Phi' + \Psi'' + s^2\Psi &= 0, \quad \Phi' + is\Psi = 0, \quad y = 0, \\ -2is\Phi' + \Psi' + s^2\Psi &= 0, \quad (k_s^2 - 2s^2)\Phi - 2is\Psi' = \frac{e^{ix_0s}}{\rho c_s^2}, \quad y = h.\end{aligned}\quad (3.49)$$

Система (3.49) с Φ и Ψ , определяемыми выражениями (3.48), приводит к линейной алгебраической системе 4×4 для коэффициентов A, B, C, D

$$\begin{aligned}-2is\gamma B + (2s^2 - k_s^2)C &= 0, \\ \gamma B + isC &= 0, \\ -2is\gamma A \operatorname{sh}(\gamma h) + (2s^2 - k_s^2)D \operatorname{sh}(qh) &= 0, \\ -(2s^2 - k_s^2)A \operatorname{sh}(\gamma h) - 2isq \operatorname{sh}(qh) &= \frac{e^{ix_0s}}{\rho c_s^2},\end{aligned}\quad (3.50)$$

решение которой

$$\begin{aligned}B &= C = 0, \\ A &= -\frac{e^{ix_0s}}{\rho c_s^2} \frac{(2s^2 - k_s^2) \operatorname{sh}(qh)}{\Delta(s)}, \quad D = -\frac{e^{ix_0s}}{\rho c_s^2} \frac{2is\gamma \operatorname{sh}(\gamma h)}{\Delta(s)},\end{aligned}\quad (3.51)$$

$$\Delta(s) = (2s^2 - k_s^2)^2 \operatorname{sh}(qh) \operatorname{ch}(\gamma h) - 4s^2\gamma q \operatorname{sh}(\gamma h) \operatorname{ch}(qh). \quad (3.52)$$

Это окончательно определяет все упругие функции в слое, в частности потенциалы Ламе

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= -\frac{1}{2\pi\rho c_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2s^2 - k_s^2) \operatorname{sh}(qh) \operatorname{ch}(\gamma y)}{\Delta(s)} e^{is(x-x_0)} ds, \\ \psi(x, y) &= -\frac{1}{2\pi\rho c_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2is\gamma \operatorname{sh}(\gamma h) \operatorname{sh}(qy)}{\Delta(s)} e^{is(x-x_0)} ds,\end{aligned}\quad (3.53)$$

где четность подынтегрального выражения позволяет писать $\exp[is(x-x_0)]$ вместо $\exp[-is(x-x_0)]$.

Для того чтобы прояснить взаимосвязь между условиями излучения Зоммерфельда и энергетическим условием в данном случае упругого

слоя, сначала выведем представление для среднего потока энергии за период $T = 2\pi/\omega$

$$W = -\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\sigma_{xx} \frac{du_x}{dt} + \sigma_{xy} \frac{du_y}{dt} \right) dt. \quad (3.54)$$

Знак минус, которого не было в скалярной акустике, появляется здесь потому, что в скалярной акустике, в отличие от упругих напряжений, положительное давление p является сжимающим.

Теперь в вещественных величинах компоненты вектора смещения

$$\begin{aligned} u_{x,y} i(x, y, t) &= \text{Re}\{e^{-i\omega t} \tilde{u}_{x,y}(x, y)\} = \tilde{u}_i^{\text{re}} \cos \omega t + \tilde{u}_{x,y}^{\text{im}} \sin \omega t, \\ \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \\ &= \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_x^{\text{re}}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y^{\text{re}}}{\partial x} \right) \cos \omega t + \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_x^{\text{im}}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y^{\text{im}}}{\partial x} \right) \sin \omega t = \\ &= \tilde{\sigma}_{xy}^{\text{re}} \cos \omega t + \tilde{\sigma}_{xy}^{\text{im}} \sin \omega t, \\ \frac{du_y}{dt} &= \omega (-\tilde{u}_y^{\text{re}} \sin \omega t + \tilde{u}_y^{\text{im}} \cos \omega t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_{xy} \frac{du_y}{dt} dt &= \frac{\omega}{2} \mu \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_x^{\text{re}}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y^{\text{re}}}{\partial x} \right) \tilde{u}_y^{\text{im}} - \left(\frac{\partial \tilde{u}_x^{\text{im}}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y^{\text{im}}}{\partial x} \right) \tilde{u}_y^{\text{re}} \right] = \\ &= \frac{\omega}{2} (\tilde{\sigma}_{xy}^{\text{re}} \tilde{u}_y^{\text{im}} - \tilde{\sigma}_{xy}^{\text{im}} \tilde{u}_y^{\text{re}}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

По аналогии

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_{xx} \frac{du_x}{dt} dt = \frac{\omega}{2} (\tilde{\sigma}_{xx}^{\text{re}} \tilde{u}_x^{\text{im}} - \tilde{\sigma}_{xx}^{\text{im}} \tilde{u}_x^{\text{re}}), \quad (3.57)$$

отсюда

$$W = -\frac{\omega}{2} [(\tilde{\sigma}_{xx}^{\text{re}} \tilde{u}_x^{\text{im}} - \tilde{\sigma}_{xx}^{\text{im}} \tilde{u}_x^{\text{re}}) + (\tilde{\sigma}_{xy}^{\text{re}} \tilde{u}_x^{\text{im}} - \tilde{\sigma}_{xy}^{\text{im}} \tilde{u}_x^{\text{re}})]. \quad (3.58)$$

С другой стороны, когда мы оперируем комплексными амплитудами

$$u_i(x, t) = e^{-i\omega t} \tilde{u}_i(x), \quad \sigma_{ij}(x, t) = e^{-i\omega t} \tilde{\sigma}_{ij}(x) \quad (i, j = 1, 2), \quad (3.59)$$

то имеем

$$\text{Im}(\tilde{\sigma}_{xy}^* \tilde{u}_y + \tilde{\sigma}_{xx}^* \tilde{u}_x) = (\tilde{\sigma}_{xx}^{\text{re}} \tilde{u}_x^{\text{im}} - \tilde{\sigma}_{xx}^{\text{im}} \tilde{u}_x^{\text{re}}) + (\tilde{\sigma}_{xy}^{\text{re}} \tilde{u}_y^{\text{im}} - \tilde{\sigma}_{xy}^{\text{im}} \tilde{u}_y^{\text{re}}), \quad (3.60)$$

поэтому, принимая во внимание (3.54), получаем

$$W = -\frac{\omega}{2} \text{Im}(\tilde{\sigma}_{xx}^* \tilde{u}_x + \tilde{\sigma}_{xy}^* \tilde{u}_y) = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\tilde{\sigma}_{xx} \tilde{u}_x^* + \tilde{\sigma}_{xy} \tilde{u}_y^*). \quad (3.61)$$

Данная формула весьма удобна для вычисления потока энергии, если желательно избежать перехода от комплексных величин к вещественным.

Далее выведем другое представление для W , содержащее $d\omega/ds$, где $\omega(s)$ и $s(\omega)$ — функции дисперсии, т.е. решения уравнения Рэлея–Ламе $\Delta(s, \omega) = 0$. Рассмотрим произвольную однородную моду, полученную как вычет в простом положительном полюсе в уравнении (3.53), т.е. как корень уравнения $\Delta = 0$ в знаменателе. Тогда структура любой моды в терминах вектора смещения в случае $x > x_0$ такова:

$$u_i(x, y) = u_{im}(y) e^{is(x-x_0)}, \quad s = s_m, \quad \sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ijm} e^{is(x-x_0)}, \quad (3.62)$$

где m — номер моды.

Так как для $x > x_0$ все правые части в уравнениях (3.46), (3.47) однородны, построенная волновая мода (3.62) является решением однородных краевых задач, которые теперь удобно рассматривать в качестве уравнений движения (см. раздел 1.9), выраженных через компоненты тензора напряжения, $\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0$ ($i = 1, 2$), с суммированием по повторяющемуся индексу j . Тогда с помощью (3.62) получим

$$\begin{aligned} i\sigma_{xxm} + \sigma'_{xy_m} + \rho\omega^2 u_{xm} &= 0, \\ i\sigma_{xy_m} + \sigma'_{yy_m} + \rho\omega^2 u_{ym} &= 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u_{ym} &= 0, \\ \sigma_{xy} &= 0: \quad u'_{xm} + i s u_{ym} = 0, \\ y = h, \quad \sigma_{xy} &= 0: \quad u'_{xm} + i s u_{ym} = 0, \\ \sigma_{yy} &= 0: \quad c_p^2 i s u_{xm} + (c_p^2 - 2c_s^2) u'_{ym} = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

(штрих обозначает производную по y).

Дифференцирование системы (3.63) по s дает

$$\begin{aligned} i s g_{xx} + g'_{xy} + \rho\omega^2 g_x &= -i\sigma_{xxm} - 2\rho\omega \frac{d\omega}{ds} u_{xm}, \\ i s g_{xy} + g'_{yy} + \rho\omega^2 g_y &= -i\sigma_{xy_m} - 2\rho\omega \frac{d\omega}{ds} u_{ym}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} g_{xx} &= \frac{d\sigma_{xxm}}{ds}, \quad g_{xy} = \frac{d\sigma_{xy_m}}{ds}, \quad g_{yy} = \frac{d\sigma_{yy_m}}{ds}, \\ g_x &= \frac{du_{xm}}{ds}, \quad g_y = \frac{du_{ym}}{ds}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Аналогично дифференцирование граничных условий (3.64) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} y = 0: \quad g_y &= 0, \quad g'_x + i s g_y = -i u_{ym}, \\ y = h: \quad g'_x + i s g_y &= -i u_{ym}, \quad c_p^2 i s g_x + (c_p^2 - 2c_s^2) g'_y = -i c_p^2 u_{xm}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Теперь перепишем сопряженную систему (3.63):

$$\begin{aligned} -is\sigma_{xx_m}^* + \sigma_{xy_m}^{*'} + \rho\omega^2 u_{x_m}^* &= 0, \\ -is\sigma_{xy_m}^* + \sigma_{yy_m}^{*'} + \rho\omega^2 u_{y_m}^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

и объединим следующие скалярные произведения:

$$(3.65)_1 \cdot u_{x_m}^* + (3.65)_2 \cdot u_{y_m}^* - (3.68)_1 \cdot g_x - (3.68)_2 \cdot g_y, \quad (3.69)$$

где знак скалярного произведения означает интегрирование уравнения, умноженного на соответствующую функцию. Эта процедура приводит к тождеству

$$\begin{aligned} is \int_0^h (g_{xx} u_{x_m}^* + \sigma_{xx_m}^* g_x) dy + \int_0^h (g'_{xy} u_{x_m}^* - \sigma_{xy_m}^{*'} g_x) dy + \\ + is \int_0^h (g_{xy} u_{y_m}^* + \sigma_{xy_m}^* g_y) dy + \int_0^h (g'_{yy} u_{y_m}^* - \sigma_{yy_m}^{*'} g_y) dy = \\ = -i \int_0^h (\sigma_{xx_m} u_{x_m}^* + \sigma_{xy_m}^* u_{y_m}^*) dy - 2\rho\omega \frac{d\omega}{ds} \int_0^h (|u_{x_m}|^2 + |u_{y_m}|^2) dy. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Довольно скрупулезные математические преобразования с интегралами в левой части (3.70) с помощью граничных условий (3.64), (3.67) показывают, что, так же как и в скалярном акустическом случае, данная правая часть равна нулю. Тогда из уравнения (3.70), (3.61) следует, что

$$W = \frac{\omega}{2} \int_0^h \text{Im} (\tilde{\sigma}_{xx} \tilde{u}_x^* + \tilde{\sigma}_{xy} \tilde{u}_y^*) dy = \rho\omega^2 \frac{d\omega}{ds} \int_0^h (|\tilde{u}_{x_m}|^2 + |\tilde{u}_{y_m}|^2) dy. \quad (3.71)$$

Формула (3.71) позволяет прояснить взаимосвязь между принципами Зоммерфельда и Мандельштама. Пусть $s = s_m > 0$ будет положительным корнем уравнения Рэлея–Ламе $\Delta(s) = 0$ (поскольку в структуре функции $\Delta(s)$ присутствует лишь квадрат величины s , то если $s = s_m$ есть корень уравнения, тогда и $s = -s_m$ также его корень). В этом случае точка $s = s_m$ — простой полюс во всех подынтегральных выражениях в соответствующих представлениях Фурье типа (3.14) для всех физических величин, так что пары функций

$$\varphi(x, y, t) = \tilde{\varphi}(y) e^{i[s_m(x-x_0) - \omega t]}, \quad \psi(x, y, t) = \tilde{\psi}(y) e^{i[s_m(x-x_0) - \omega t]} \quad (3.72)$$

определяют однородную моду, которая распространяется вправо, согласно условию излучения Зоммерфельда, не затухая в дальней зоне.

Теперь из (3.71) ясно, что эта мода находится в соответствии с энергетическим условием излучения Мандельштама тогда и только тогда, когда

$$\frac{d\omega}{ds}(s = s_m) = \frac{1}{ds/d\omega} > 0. \quad (3.73)$$

Для того чтобы проверить, выполняется ли условие (3.73), необходимо построить кривые дисперсии. В скалярной акустике, как мы помним, все дисперсионные кривые — монотонно возрастающие. Для упругого слоя пример дисперсионных кривых как решений уравнения Рэлея–Ламе $\Delta(s, \omega) = 0$, $c^2 = c_s^2/s_p^2$, $0 < c^2 < 1$, показан на рис. 3.2 ($k_s = \omega/c_s$).

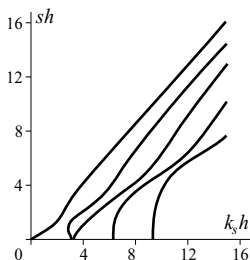


Рис. 3.2. Кривая дисперсии для динамической упругой задачи

На данных кривых видны участки, где $ds/d\omega < 0$. Как следует из рассмотренной теории, в таких случаях моды, распространяющиеся вправо, несут энергию из бесконечности и, следовательно, не соответствуют энергетическому условию излучения. Физически это выглядит как некая мистика, подтверждая тем самым, что интуиция иногда может вступать в противоречие со строгим математическим анализом. Как бы то ни было, следует согласиться с тем, что энергетический принцип излучения более фундаментален, нежели принцип Зоммерфельда и, таким образом, отбросить моды, для которых

$$\frac{ds}{d\omega}(s = s_m) < 0, \quad s_m > 0. \quad (3.74)$$

Этот вывод влияет на выбор контура интегрирования в (3.7). Что касается положительной половины контура, он должен быть искривлен вокруг полюсов s_m подынтегрального выражения снизу при $ds/d\omega > 0$ и сверху в случае $ds/d\omega < 0$.

Отметим еще раз, что Миндлин был первым [104], кто указал случай, когда волна, удовлетворяющая принципу излучения Зоммерфельда, приносит энергию из бесконечности. Фундаментальный и весьма впечатляющий анализ связи между разными условиями излучения дан в книге [15], а также в работе [3].

Примечание. Уравнение Рэлея–Ламе $\Delta(s, \omega) = 0$, где функция $\Delta(s, \omega)$ задана формулой (3.52), определяет поведение дисперсионных кривых, как на рис. 3.2. В отличие от уравнения дисперсии скалярной акустической теории, которое допускает простое решение (см. раздел 3.2), уравнение Рэлея–Ламе нельзя решить явно. Тем не менее это дисперсионное уравнение подробно изучено. Асимптотической оценке для его больших корней посвящено много работ, и многие авторы исследуют уравнение Рэлея–Ламе. Полезные результаты с дальнейшими ссылками могут быть найдены в [15, 104] и других работах. Авторы данных работ исследуют случаи упомянутого нерегулярного поведения дисперсионных кривых численно. Заметим, что единственным безразмерным параметром, изменение которого изменяет конфигурацию дисперсионных кривых, является параметр отношения продольной и касательной волновых скоростей. На рис. 3.2 эти кривые показаны для случая $c_p/c_s = 2$, что вполне реалистично для металлов.

3.4. Суммирование некоторых осциллирующих рядов

Исследуем следующий ряд, который встретится в анализе высокочастотных процессов в слое постоянной толщины:

$$C_\beta(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\xi}{m^\beta}, \quad S_\beta(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\xi}{m^\beta}. \quad (3.75)$$

Как сказано в разделе 1.3, данный ряд сходится в классическом смысле при $\operatorname{Re}(\beta) > 0$. Тем не менее практическое вычисление для относительно малых β — задача сложная. Вычисления показывают, что, для того чтобы гарантировать точность в три значащие цифры, необходимо брать несколько тысяч членов. Естественно, возникает вопрос об ускорении сходимости.

С этой целью привлечем некоторые результаты из теории дзета-функции Римана. Вспомним, что обычная и обобщенная дзета-функции Римана определяются соответственно следующими рядами:

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \zeta(s, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+v)^s}. \quad (3.76)$$

Можно показать, что обе функции как функции аргумента s аналитичны во всей комплексной плоскости за исключением единственной особой точки $s = 1$, которая является простым полюсом для обеих функций [65].

В дальнейшем будем использовать глубокие классические результаты, выражаемые формулой Гурвица [65]

$$\zeta\left(1 - \beta, \frac{\xi}{2\pi}\right) = \frac{2\Gamma(\beta)}{(2\pi)^\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\xi - \pi\beta/2)}{m^\beta} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\Gamma(\beta)}{(2\pi)^\beta} \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\xi}{m^\beta} + \sin \frac{\pi\beta}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\xi}{m^\beta} \right) = \\
&= \frac{2\Gamma(\beta)}{(2\pi)^\beta} \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} C_\beta(\xi) + \sin \frac{\pi\beta}{2} S_\beta(\xi) \right), \quad \operatorname{Re} \xi > 0. \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Развиваемый здесь подход переключается с идеями [42, 43]

Наша задача — получить из уравнения (3.77) разложение по степеням ξ . Для этого разложим второе равенство (3.76) в ряд Тейлора в окрестности точки $v = 0$, принимая во внимание, что производная от $\zeta(s, v)$ по v при $v = 0$ — это обычная дзета-функция Римана с некоторым показателем s . Именно из (3.76) следует

$$\begin{aligned}
\zeta(s, v) &= \frac{1}{v^s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+v)^s} = \\
&= \frac{1}{v^s} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{s(s+1)\dots(s+m-1)}{m!} \zeta(s+m) v^m = \\
&= \frac{1}{v^s} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s)m!} \zeta(s+m) v^m \quad (0! = 1). \quad (3.78)
\end{aligned}$$

Следовательно, левая часть (3.77) допускает альтернативное представление

$$\zeta(1-\beta, \frac{\xi}{2\pi}) = \left(\frac{2\pi}{\xi}\right)^{1-\beta} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(m+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)m!} \zeta(m+1-\beta) \left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^m. \quad (3.79)$$

Так как левые части уравнений (3.77) и (3.79) идентичны, их правые части также должны совпадать друг с другом. Это позволяет построить два независимых разложения по степеням $(\xi/2\pi)$ отдельно для $\sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\xi)/m^\beta$ и $\sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\xi)/m^\beta$, так как четные степени ξ в (3.79) относятся к первому из этих двух рядов, а нечетные — ко второму. Единственное препятствие — присутствие нерегулярного слагаемого в (3.79) $(2\pi/\xi)^{1-\beta}$. Одна часть данного слагаемого принадлежит ряду с косинусами, а другая ряду с синусами. Правильное разделение нерегулярного слагаемого — непростая задача. Для ее решения воспользуемся формулой Пуассона (см., например, [73]), которая обычно бесполезна при работе с осциллирующими рядами. В нашем случае она применяется следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{im\xi}}{m^\beta} = e^{i\xi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{im\xi}}{(m+1)^\beta} = e^{i\xi} \left[\frac{1}{2} + H(0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} H(2\pi m) \right], \quad (3.80)$$

где

$$H(2\pi m) = \int_0^{\infty} \cos(2\pi mu) \frac{e^{iu\xi}}{(u+1)^\beta} du, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.81)$$

Если m здесь — положительное целое число ($m \geq 1$), то последнее равенство приводит только к регулярному степенному разложению по ξ для $H(2\pi m)$. Этот факт может быть доказан разложением $\exp(iu\xi)$ в ряд Тейлора, так как интеграл

$$\int_0^{\infty} \cos(2\pi mu) \frac{u^p}{(u+1)^\beta} du \quad (3.82)$$

имеет конечное обобщенное значение для произвольного большого положительного целого числа p (ср. раздел 1.3), что влечет аналитическое продолжение по p из области $-1 < \operatorname{Re}(p) < 0$, где интеграл сходится в классическом смысле. Следовательно, нерегулярный член при $m = 0$

$$\begin{aligned} H(0) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{iu\xi}}{(u+1)^\beta} du = \xi^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{iu} du}{(u+\xi)^\beta} \sim \\ &\sim \xi^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{iu} du}{u^\beta} = \Gamma(1-\beta) \xi^{\beta-1} e^{\pi i(1-\beta)/2} \quad (\xi \rightarrow +0) \end{aligned} \quad (3.83)$$

и, таким образом,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{im\xi}}{m^\beta} = \Gamma(1-\beta) \xi^{\beta-1} e^{\pi i(1-\beta)/2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m \quad (\xi \rightarrow +0) \quad (3.84)$$

с некоторыми коэффициентами a_m регулярной степенной части. Разделяя вещественную и мнимую части в последнем равенстве, находим, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\xi}{m^\beta} = \Gamma(1-\beta) \cos \left[\frac{\pi}{2}(1-\beta) \right] \xi^{\beta-1} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \xi^{2m}, \quad (3.85)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\xi}{m^\beta} = \Gamma(1-\beta) \sin \left[\frac{\pi}{2}(1-\beta) \right] \xi^{\beta-1} + \sum_{m=0}^{\infty} d_m \xi^{2m+1}. \quad (3.86)$$

Как установлено выше, коэффициенты в регулярных разложениях могут быть получены сопоставлением правых частей в формулах (3.77) и (3.79), и окончательно

$$C_\beta(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\xi}{m^\beta} = \Gamma(1-\beta) \cos \left[\frac{\pi}{2}(1-\beta) \right] \xi^{\beta-1} + \\ + \frac{(2\pi)^\beta}{2\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\cos(\pi\beta/2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2m+1-\beta)\zeta(2m+1-\beta)}{(2m)!} \left(\frac{\xi}{2\pi} \right)^{2m} \\ (\xi, \beta > 0), \quad (3.87)$$

$$S_\beta(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\xi}{m^\beta} = \Gamma(1-\beta) \sin \left[\frac{\pi}{2}(1-\beta) \right] \xi^{\beta-1} - \\ - \frac{(2\pi)^\beta}{2\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\sin(\pi\beta/2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2m+2-\beta)\zeta(2m+2-\beta)}{(2m+1)!} \left(\frac{\xi}{2\pi} \right)^{2m+1} \\ (\xi, \beta > 0). \quad (3.88)$$

Для того чтобы оценить, насколько быстро слагаемые в последнем ряду убывают с увеличением m , применим формулу Стирлинга [1]

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-z} z^z, \quad \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\gamma)} \sim z^{\alpha-\gamma} \quad (z \rightarrow +\infty). \quad (3.89)$$

Данная оценка показывает, что слагаемые в рядах (3.87) и (3.88) убывают как $O[m^{-\beta}(\xi/2\pi)^{2m}]$ при $m \rightarrow \infty$, поскольку $(2m)! = \Gamma(2m+1)$ и $(2m+1)! = \Gamma(2m+2)$. Заметим также, что достаточно вычислить слагаемые на интервале $0 < \xi \leq \pi$ благодаря очевидной периодичности: $C_\beta(2\pi - \xi) = C_\beta(\xi)$, $S_\beta(2\pi - \xi) = -S_\beta(\xi)$. Следовательно, скорость сходимости рядов (3.13) такая же, как и у геометрической прогрессии $\{q^m\}$ с основанием $q \leq 1/2$. На практике для обеспечения хорошей точности достаточно оставить три или четыре члена ряда.

Приведем явные выражения для частных случаев, которые встречаются в следующем разделе:

$$C_{1/2}(\xi) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} - 1,460 + 0,0255 \frac{\xi^2}{2!} + 0,00444 \frac{\xi^4}{4!} + 0,00267 \frac{\xi^6}{6!}, \quad (3.90)$$

$$S_{1/2}(\xi) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} - 0,208 \xi - 0,00852 \frac{\xi^3}{3!} - 0,00309 \frac{\xi^5}{5!}, \quad (3.91)$$

$$C_{3/2}(\xi) \approx -\sqrt{2\pi\xi} + 2,612 + 0,208 \frac{\xi^2}{2!} + 0,00852 \frac{\xi^4}{4!} + 0,00309 \frac{\xi^6}{6!}, \quad (3.92)$$

$$S_{3/2}(\xi) \approx \sqrt{2\pi\xi} - 1,460\xi + 0,0255 \frac{\xi^3}{3!} + 0,00444 \frac{\xi^5}{5!}, \quad (3.93)$$

$$C_{5/2}(\xi) \approx -\frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \xi^{3/2} + 1,341 + 1,460 \frac{\xi^2}{2!} - 0,0255 \frac{\xi^4}{4!} - 0,00444 \frac{\xi^6}{6!}, \quad (3.94)$$

$$S_{5/2}(\xi) \approx -\frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \xi^{3/2} + 2,612\xi + 0,208 \frac{\xi^3}{3!} + 0,00852 \frac{\xi^5}{5!}. \quad (3.95)$$

На практике все они используются для $0 < \xi \leq \pi$ и далее продолжают периодически. Относительная погрешность данных формул меньше, чем 1%. Их точность может быть повышена учетом большего числа членов в разложениях. В табл. 3.1 приведены результаты, сказанные формулами (3.90)–(3.95) в сравнении с полученными прямым вычислением по формулам (3.75) (программа на языке Фортран) с двойной точностью при учете 5×10^5 слагаемых в рядах.

Таблица 3.1

ξ	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
$C_{1/2}$ (3,75)	0,5418	−0,0380	−0,2874	−0,4275	−0,5136	−0,5665	−0,5954
$C_{1/2}$ (3,90)	0,5420	−0,0379	−0,2872	−0,4274	−0,5135	−0,5664	−0,5956
$S_{1/2}$ (3,75)	1,916	1,249	0,9067	0,6672	0,4743	0,3058	0,1501
$S_{1/2}$ (3,91)	1,918	1,250	0,9073	0,6675	0,4745	0,3060	0,1506
$C_{3/2}$ (3,75)	1,058	0,4552	0,0366	−0,2705	−0,4938	−0,6465	−0,7357
$C_{3/2}$ (3,92)	1,057	0,4548	0,0363	−0,2708	−0,4939	−0,6466	−0,7359
$S_{3/2}$ (3,75)	0,9975	1,077	1,007	0,8645	0,6783	0,4653	0,2363
$S_{3/2}$ (3,93)	0,9977	1,077	1,008	0,8651	0,6790	0,4659	0,2366
$C_{5/2}$ (3,75)	1,043	0,6283	0,2160	−0,1533	−0,4573	−0,6825	−0,8207
$C_{5/2}$ (3,94)	1,042	0,6278	0,2153	−0,1542	−0,4585	−0,6840	−0,8223
$S_{5/2}$ (3,75)	0,6167	0,9054	0,9976	0,9486	0,7961	0,5700	0,2966
$S_{5/2}$ (3,95)	0,6166	0,9051	0,9972	0,9481	0,7954	0,5691	0,2952

Примечание. Идеи, изложенные выше, применимы к вычислению сумм расходящихся рядов. Как описано в разделе 1.3, тождества (3.87) и (3.88) могут быть аналитически продолжены по параметру β в комплексной плоскости с использованием тех значений β , для которых левая и правая части конечны. В качестве примера приведем здесь два замечательных расходящихся ряда

$$C_{-1/2}(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{1/2} \cos m\xi, \quad S_{-1/2}(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{1/2} \sin m\xi \quad (3.96)$$

и сравним результаты прямого численного расчета с методом на основе формул (3.87), (3.88) при $\beta = -1/2$. Данные ряды выражаются в виде

$$C_{-1/2}(\xi) \approx -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{-3/2} - 0,208 - 0,00852\frac{\xi^2}{2!} - 0,00309\frac{\xi^4}{4!} - 0,00346\frac{\xi^6}{6!}, \quad (3.97)$$

$$S_{-1/2}(\xi) \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{-3/2} - 0,0255\xi - 0,00444\frac{\xi^3}{3!} - 0,00267\frac{\xi^5}{5!}. \quad (3.98)$$

В прямом суммировании мы применили идеи, изложенные в разделе 1.3. Конкретно мы установили $x = 0,999$ и взяли верхний предел

суммирования 5×10^4 в рядах

$$\sum_{m=1}^{\infty} x^m m^{1/2} \cos m\xi, \quad \sum_{m=1}^{\infty} x^m m^{1/2} \sin m\xi, \quad (3.99)$$

рассматривая эти ряды как обобщенное значение рядов (3.96). Результаты сравнения отражены в табл. 3.2. (Таблица впечатляет, не правда ли?)

Таблица 3.2

ξ	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
$C_{-1/2}$ (3,75)	-2,745	-1,109	-0,7035	-0,5372	-0,4540	-0,4094	-0,3869
$C_{-1/2}$ (3,97)	-2,755	-1,111	-0,7041	-0,5376	-0,4543	-0,4096	-0,3870
$S_{-1/2}$ (3,75)	2,5461	0,8816	0,4594	0,2755	0,1715	0,1017	0,0476
$S_{-1/2}$ (3,98)	2,5364	0,8799	0,4588	0,2752	0,1714	0,1019	0,0485

3.5. Эффективное вычисление волновых полей в слое постоянной толщины

Вернемся к задаче эффективного вычисления волнового поля в слое постоянной толщины. Здесь мы будем иметь дело только с акустическим случаем, но предлагаемые идеи применимы и к упругому случаю.

Для начала заметим, что для произвольного фиксированного k только конечное количество членов N обладает вещественной групповой скоростью s_n в модовом представлении (3.14). Для всех остальных слагаемых, когда $n > N$, величины s_n мнимые, и модуль $|s_n|$ растет с увеличением n . Следовательно, данные ряды (3.14) в случае $x \neq x_0$ сходятся как геометрическая прогрессия. Вопросу эффективного вычисления акустических волн в слое постоянной толщины в случае $x = x_0$ было посвящено большое количество исследований. Приведем краткий обзор существующих методов.

В принципе, прямое вычисление интеграла (3.7), где $L(s)$ определяется уравнениями (3.8)–(3.10), дает приемлемый инструмент для вычислений, потому что все особенности подынтегрального выражения лежат на конечном интервале $-k < s < k$. Вне данного интервала подынтегральное выражение убывает экспоненциально (мы исключаем из рассмотрения случай $y = y_0$, так как при этом $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$ одновременно и построенная функция Грина имеет логарифмическую особенность). Но на практике данный подход никогда не применяется по следующим двум причинам. Во-первых, все конечное число вещественных особенностей — простые полюсы и интеграл может быть сведен к сингулярному интегралу типа Коши одновременным добавлением одной второй вычетов в соответствующих полюсах. Тем не менее прямое вычисление сингулярных интегралов — это довольно

сложная задача. Во-вторых, численный расчет любого интеграла (даже с непрерывным подынтегральным выражением) — всегда более сложная задача, чем вычисление суммы рядов. Таким образом, преобразуем интеграл к некоторому ряду.

С другой стороны, разложение по модам (3.14) с $x = x_0$ не может быть использовано в том виде, в котором оно записано, для прямых численных расчетов, поскольку общий член убывает как $1/n$. Данный ряд сходится из-за присутствия осциллирующего множителя, но он абсолютно непригоден для прямых вычислений. Для того чтобы преодолеть данную трудность, некоторые авторы применяют так называемое *преобразование Куммера* (см., например, [95, 102]). Если $x = x_0$, то разложение по модам (3.14) может быть представлено в виде комбинации следующих рядов:

$$F^{\pm}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{q_m} \left\{ \begin{array}{l} \cos(p_m^{(1,2)} \eta) \\ \sin(p_m^{(3)} \eta) \end{array} \right\}, \quad (3.100)$$

$$q_m = \sqrt{p_m^2 - k^2}, \quad p_m^{(1,2)} = \pi m, \quad p_m^{(3)} = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right).$$

Более точно:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x_0, y) &= \frac{1}{2} \left[F^+ \left(\frac{|y - y_0|}{h} \right) + F^+ \left(\frac{y + y_0}{h} \right) \right], \\ \Phi^{(2)}(x_0, y) &= \frac{1}{2} \left[F^+ \left(\frac{|y - y_0|}{h} \right) - F^+ \left(\frac{y + y_0}{h} \right) \right], \\ \Phi^{(3)}(x_0, y) &= \frac{1}{2} \left[F^- \left(\frac{|y - y_0|}{h} \right) + F^- \left(\frac{y + y_0}{h} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.101)$$

и задача может быть сведена к вычислению ряда (3.100), потому что

$$F^{\pm}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \begin{array}{l} \cos(p_n^{(1,2)} \eta) \\ \sin(p_n^{(3)} \eta) \end{array} \right\} \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{r_n} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{r_n} \left\{ \begin{array}{l} \cos(p_n^{(1,2)} \eta) \\ \sin(p_n^{(3)} \eta) \end{array} \right\},$$

$$q_n = \sqrt{p_n^2 - k^2}, \quad r_n = \sqrt{p_n^2 + b^2}. \quad (3.102)$$

Теперь для любого фиксированного значения параметра k общий член в первой последовательности убывает как $1/n^3$, и ряд достаточно удобен для эффективных вычислений, но второй ряд по-прежнему сходится медленно, как в (3.14). Однако он допускает применение *формулы суммирования Пуассона* [126]. Мы уже применяли эту формулу к некоторым рядам в предыдущем разделе, а здесь дадим более полный обзор.

Если $f(x) \in C[0, \infty)$, $f(x) \in L_1[0, \infty)$ и a — параметр, то

$$a \sum_{n=0}^{\infty} f(an) = \frac{a}{2} f(0) + F(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{a}\right), \quad (3.103)$$

где $F(s)$ — косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \cos(sx) f(x) dx. \quad (3.104)$$

Эта формула имеет аналог для конечных сумм

$$a \sum_{n=0}^n f(an) = \frac{a}{2} [f(0) + f(a)] + F(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{a}\right). \quad (3.105)$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{r_n} \left\{ \frac{\cos(p_n^{(1,2)} \eta)}{\sin(p_n^{(3)} \eta)} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n} \left\{ \frac{\cos(p_n^{(1,2)})}{\sin(p_n^{(3)})} \right\} \left\{ \frac{\cos(p_n^{(1,2)} \eta)}{\sin(p_n^{(3)} \eta)} \right\}, \quad (3.106)$$

то преобразование произведения тригонометрических функций к их суммам сводит вычисление второго ряда (3.102) к вычислению некоторого другого ряда, который мы рассматриваем отдельно в задачах 1, 2 и 3 (см. формулы (3.8)–(3.10)).

Верхняя строка в (3.106) приводит к ряду вида

$$S^{(1,2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n \zeta)}{\sqrt{(\pi n)^2 + b^2}}, \quad (3.107)$$

который допускает непосредственное применение формулы Пуассона (3.103), так как $a = \pi$, $f(x) = \cos(x\zeta)/\sqrt{x^2 + b^2}$ и (3.104) дает

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \frac{\cos(sx) \cos(x\zeta)}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos[x(s + \zeta)] + \cos[x(s - \zeta)]}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \\ &= \frac{K_0(b|s + \zeta|) + K_0(b|s - \zeta|)}{2}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Здесь K_0 — функция Макдональда, которая экспоненциально убывает с ростом аргумента. Следовательно, в данных задачах мы приходим к ряду

$$S^{(1,2)} = \frac{1}{2b} + \frac{K_0(b|\zeta|)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [K_0(b|2n + \zeta|) + K_0(b|2n - \zeta|)], \quad (3.109)$$

который сходится экспоненциально.

В задаче 3 нижняя строка в (3.106) приводит к ряду в виде

$$\begin{aligned} S^{(3)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[\pi(n + 1/2)\zeta]}{\sqrt{[\pi(n + 1/2)]^2 + b^2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[\pi i(n + 1/2)\zeta]}{\sqrt{[\pi(n + 1/2)]^2 + b^2}} = \\ &= \frac{\exp(\pi \zeta i/2)}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(\pi n \zeta i)}{\sqrt{[\pi(n + 1/2)]^2 + b^2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\exp(\pi\zeta i/2)}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\exp(\pi n\zeta i)}{\sqrt{[\pi(n+1/2)]^2 + b^2}} - \frac{\exp(\pi n\zeta i)}{\sqrt{(\pi n)^2 + b^2}} \right] + \\ + \exp(\pi\zeta i/2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n\zeta)}{\sqrt{(\pi n)^2 + b^2}} - \frac{1}{2b} \right], \quad (3.110)$$

где общий член в первом ряду в правой части (3.110) снова убывает как $1/n^3$, а последний ряд, сведенный к $S^{(1,2)}$, уже вычислен.

Таким образом, для низких и средних k преобразование Куммера обеспечивает достаточно быструю сходимость. Тем не менее данное преобразование при увеличении параметра частоты k становится неэффективным вследствие специфического поведения разности в круглых скобках формулы (3.102). Именно поэтому мы предложим здесь альтернативный подход.

Заметим, что все подынтегральные выражения в (3.7)–(3.10) (раздел 3.1) представляют собой некоторые комбинации вида

$$L^{\pm}(s, \zeta) = \frac{e^{-\zeta\gamma}}{2\gamma(1 \pm e^{-2\gamma h})}, \quad \zeta > 0. \quad (3.111)$$

Более точно

$$\begin{aligned} L_1(s, y) &= L^-(s, |y-y_0|) + L^-(s, 2h-|y-y_0|) + \\ &\quad + L^-(s, y+y_0) + L^-(s, 2h-y-y_0), \\ L_2(s, y) &= L^-(s, |y-y_0|) + L^-(s, 2h-|y-y_0|) - \\ &\quad - L^-(s, y+y_0) - L^-(s, 2h-y-y_0), \\ L_3(s, y) &= L^+(s, |y-y_0|) - L^+(s, 2h-|y-y_0|) + \\ &\quad + L^+(s, y+y_0) - L^+(s, 2h-y-y_0). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Следовательно, задача сводится к эффективному вычислению интеграла ($0 \leq \zeta \leq 2h$)

$$\begin{aligned} G(x, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L^{\pm}(s, \zeta) e^{-is(x-x_0)} ds = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma(2nh+\zeta)}}{\gamma} e^{-is(x-x_0)} ds = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n H_0^{(1)} \left[k\sqrt{(2nh+\zeta)^2 + (x-x_0)^2} \right] = \\ &= \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k\sqrt{(x-x_0)^2 + \zeta^2} \right) + G_1(x, y), \\ G_1(x, y) &= \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n H_0^{(1)} \left[k\sqrt{(2nh+\zeta)^2 + (x-x_0)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Вспомним, что теперь мы исследуем суммирование для $x = x_0$, где первые N членов (N достаточно велико) могут быть вычислены точно как

$$\frac{i}{4} \sum_{n=1}^N (\mp 1)^n H_0^{(1)}[k(2nh + \zeta)], \quad (3.114)$$

и для $n > N$ мы можем использовать асимптотическое представление функции Ханкеля [65]

$$H_0^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \pi/4)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)}{m! \Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right) (-2zi)^m}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.115)$$

В результате задача суммирования сводится к вычислению ряда вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n \frac{e^{2k h n i}}{(2nh + \zeta)^{m+1/2}}. \quad (3.116)$$

Выпишем несколько первых членов в разложении Тейлора знаменателя ($\xi = \zeta/2h$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n + \xi)^{m+1/2}} &= \frac{1}{n^{m+1/2}} - \frac{(m+1/2)y}{n^{m+3/2}} + \frac{(m+1/2)(m+3/2)y}{n^{m+5/2}} + \\ &+ \left[\frac{1}{(n + \xi)^{m+1/2}} - \frac{1}{n^{m+1/2}} + \frac{(m+1/2)y}{n^{m+3/2}} - \frac{(m+1/2)(m+3/2)y}{n^{m+5/2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Здесь сумма в квадратных скобках стремится к нулю по крайней мере как $n^{-7/2}$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому для получения хорошей точности равномерно по частотному параметру k достаточно оставить лишь несколько слагаемых в ряду. Таким образом, задача сводится к вычислению медленно сходящегося ряда вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\delta n i}}{n^{\beta}} = C_{\beta}(\delta) + i S_{\beta}(\delta) \quad (3.118)$$

с некоторыми значениями δ и β . Данные ряды были изучены в предыдущем разделе.

Примечание. Интересно, что в представлении (3.113) каждое слагаемое подобно точечному источнику функции Грина для полного неограниченного пространства. Это вполне соответствует эвристической идее о том, что задача определения функции Грина в слое отличается от аналогичной задачи в неограниченном пространстве добавочными граничными условиями $\partial p / \partial n$ на двух прямых. Любая пара источников, размещенная симметрично относительно любой прямой, автоматически обеспечивает нулевую нормальную производную на этой прямой. С этой точки зрения представление (3.113) может трактоваться как представление последовательности источников, необходимых для симметричного размещения относительно данных граничных линий.

Глава 4

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

4.1. Спектральные свойства внутренней задачи для лапласиана

Очевидно, что вопрос о спектральных свойствах произвольной одно-родной краевой задачи для лапласиана связан с наличием собственных частот и соответствующих собственных функций. Более точно — любая собственная частота ω с соответствующей собственной функцией $p \neq 0$

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (4.1)$$

очевидно, принадлежит к спектру оператора $-\Delta$:

$$-\Delta p = \mu p, \quad \mu = k^2. \quad (4.2)$$

В представлении краевых задач для волнового оператора Гельмгольца мы начали в главе 2 с внешних задач дифракции для полного (бесконечного) пространства \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) и видели, что обе внешние задачи Дирихле и Неймана, удовлетворяющие условию излучения Зоммерфельда, имеют единственное решение. Несомненно, это влечет за собой отсутствие собственных значений (4.1), (4.2), иначе существовало бы нетривиальное решение внешней задачи с тривиальными граничными условиями, что противоречит единственности.

В главе 3 мы изучили свойства акустического слоя постоянной толщины, который может быть назван *полубесконечной* областью, так как обладает некоторыми свойствами бесконечной области. В частности, корректная формулировка требует определенного граничного условия на бесконечности, как и в случае полного пространства. В то же время в акустическом слое могут существовать однородные волны, т. е. нетривиальные решения, которые удовлетворяют однородным граничным условиям. Такое случается, если частота колебаний выше определенного критического значения.

Здесь мы изучим спектральные свойства той же проблемы в ограниченных областях. Будет показано, что спектр всегда дискретный, и будет дана асимптотическая оценка для больших собственных частот.

Описанная спектральная задача в области D является классической и изучается разными методами. В основу одного из них положен тот факт, что оператор $-\Delta$ положительно определен и самосопряжен

в функциональном пространстве $L_2(D)$, если рассматривать его на подмножестве дважды дифференцируемых функций $C_2(D) \subset L_2(D)$.

Симметрия оператора $A = -\Delta$ с однородным граничным условием Дирихле или Неймана доказывается с использованием различных форм интегральной формулы Грина

$$\begin{aligned} \int_D (Au, v) dy &= - \int_D \Delta u(y) v(y) dy = \\ &= \int_D \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_j} dy - \int_{\partial D} \frac{\partial u(y)}{\partial n} v(y) ds = \\ &= \int_D \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_j} dy, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (m = 2, 3), \quad (4.3) \end{aligned}$$

для произвольных функций $u, v \in C_2(D)$, удовлетворяющих однородным условиям типа Дирихле или Неймана. Теперь становится ясно, что симметрия оператора $-\Delta$ объясняется тем, что перестановка функций u и v местами в левой части уравнения (4.3) не меняет его правой части.

Положительная определенность оператора $A = -\Delta$ также следует из соотношения (4.3) с использованием хорошо известного *неравенства Фридрихса* [34]: если $u \in C_2(D) \subset L_2(D)$ и $u(y)$ удовлетворяют однородным граничным условиям Дирихле либо Неймана, то

$$\int_D \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right)^2 dy \geq \gamma^2 \int_D u^2(y) ds, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad m = 2, 3 \quad (\gamma^2 > 0). \quad (4.4)$$

Соотношения (4.3), (4.4) доказывают, что оператор $A = -\Delta$ — симметричный (самосопряженный) и положительно определенный на подпространстве функций из $C_2(D)$, удовлетворяющих однородным граничным условиям Дирихле либо Неймана на ∂D . Поэтому спектральные свойства данного оператора напрямую следуют из общей теории таких операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Как можно заметить, мы рассмотрели здесь случай $H = L_2(D)$, поскольку воспользовались скалярным произведением и нормой, определенными в данном пространстве. К сожалению, рассматриваемый оператор $A = -\Delta$ не действует на всем $H = L_2(D)$, так как он не может быть определен в классическом смысле, если функция u не является дважды дифференцируемой. Чтобы обойти эту сложность, была создана специальная теория гильбертовых пространств Соболева, хорошо представленная, например, в [34]. Эта теория имеет дело с так называемым *энергетическим*, а не классическим решением рассматриваемого операторного уравнения, которое позволяет применить указанную общую теорию для положительно определенных самосопряженных

операторов. Теория дает также идеальную основу для построения метода конечных элементов.

Несмотря на эти современные результаты мы предпочитаем следовать по пути, проложенному классиками — основателями современной математической физики, которая базируется на теории потенциала и концепции функции Грина для ограниченных областей D .

Введем функцию Грина для простой связной ограниченной области D , которая удовлетворяет данным однородным граничным условиям типа Дирихле или Неймана.

Для определенности ограничимся анализом двумерной задачи с условиями Дирихле. Другие случаи могут быть изучены по аналогии. Искомая функция Грина $G(z, x)$, $z, x \in D \subset \mathbb{R}^2$, должна обладать следующими свойствами:

1) быть решением уравнения Лапласа

$$\Delta_x G(z, x) = 0, \quad x \in D \setminus D_z^\varepsilon, \quad (4.5)$$

вне малой ε -окрестности выбранной точки $z \in D$;

2) удовлетворять граничным условиям

$$G(z, x) = 0, \quad x \in \partial D = l; \quad (4.6)$$

3) когда $x \rightarrow z$, поведение данной функции должно быть точно таким же, как в случае полного пространства \mathbb{R}^2 :

$$G(z, x) = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - x| + H(z, x), \quad (4.7)$$

где $H(z, x)$ — регулярная функция в D относительно обоих аргументов.

Теорема 1. Если граница l ограниченной односвязной области гладкая, то функция Грина (4.5)–(4.7) существует и единственна.

Доказательство. Во-первых, заметим, что достаточно доказать для любого фиксированного $z \in D$ существование единственного регулярного решения $H(z, x)$ уравнения Лапласа

$$\Delta_x H(z, x) = 0, \quad x \in D, \quad (4.8)$$

с неоднородным граничным условием Дирихле

$$H(z, y) = \varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \ln |z - y| \in C(l), \quad y \in l. \quad (4.9)$$

Аналогично методу, примененному в разделах 2.1 и 2.2, вопросы разрешимости данной задачи могут быть сведены к исследованию ГИУ с функцией Грина во всем пространстве и $k = 0$:

$$\Phi_0(|x - y|) = \Phi|_{k=0}(|x - y|) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|. \quad (4.10)$$

А именно применим непрямой метод ГИУ при помощи введения потенциала двойного слоя, аналогично подходу, описанному в примечании 3 раздела 2.2. То есть функция $u(x) = H(z, x)$

$$u(x) = \int_l \frac{\partial \Phi_0(|x - y|)}{\partial n_y} \psi(y) dl_y, \quad x \in D, \quad (4.11)$$

дает решение задачи (4.8)–(4.9), если плотность $\psi(y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(y_0) - 2 \int_l \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} \psi(y) dl_y = \varphi(y_0), \quad (4.12)$$

что определяется граничным значением потенциала двойного слоя в предельном переходе при $x \rightarrow y_0 \in l$. Последний взят изнутри, из-за чего перед интегралом в уравнении (4.12) стоит знак минус, в отличие от уравнения (2.65).

Далее докажем, что $\lambda = 1$ не может принадлежать спектральному множеству оператора K

$$(K\psi)(y) = 2 \int_l \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} \psi(y) dl_y. \quad (4.13)$$

В самом деле, если бы существовала собственная функция $\mu(y)$, $quady \in l$, в паре с собственным значением $\lambda = 1$, то мы имели бы

$$\mu(y_0) = 2 \int_l \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_y} \mu(y) dl_y, \quad y_0 \in l, \quad \mu(y) \in C(l). \quad (4.14)$$

Тогда функция

$$v(x) = \int_l \Phi_0(|x - y|) \mu(y) dl_y \quad (4.15)$$

была бы решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$ с граничным условием (см. теорему 3 раздела 2.1)

$$\left[\frac{\partial v(x)}{\partial n_x} \right]_{x=y_0} = \int_l \frac{\partial \Phi_0(|y_0 - y|)}{\partial n_{y_0}} - \frac{\mu(y_0)}{2} dl_y = 0, \quad (4.16)$$

где мы использовали равенство (4.14).

Окончательно приходим к функции $v(x)$, которая является решением внешней задачи Неймана с нулевым граничным условием. Вследствие единственности решения этой задачи имеем $v(x) \equiv 0$ и, следовательно, $\mu(y) \equiv 0$, что противоречит предположению о том, что $\mu(y)$ — собственная функция.

Если $\lambda = 1$ не является собственным значением оператора (4.13), это значит, что интегральное уравнение Фредгольма второго рода (4.12) однозначно разрешимо. Тогда формула (4.11) определяет струк-

туру регулярной части $H(z, y)$ функции Грина и, таким образом, формула (4.7) определяет саму функцию Грина. Теорема доказана.

Теорема 2. Построенная функция Грина для лапласиана в области D симметрична: $G(z, x) = G(x, z)$.

Доказательство. Построим функцию Грина для пары функций $u_1(y) = G(z, y)$ и $u_2(y) = G(x, y)$ в области \tilde{D} , образованной из D удалением малых ε -окрестностей точек z и x . Так как обе функции удовлетворяют уравнению Лапласа, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tilde{D}} [G(z, y) \Delta G_y(x, y) - G(x, y) \Delta_y G(z, y)] dl_y = \\ &= \int_{l+l_1+l_2} \left[G(z, y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} - G(x, y) \frac{\partial G(z, y)}{\partial n_y} \right] dl_y, \quad (4.17) \end{aligned}$$

где l_1 и l_2 — круги радиуса ε вокруг точек z и x соответственно. Интеграл вдоль l равен нулю, так как обе функции удовлетворяют однородным граничным условиям. Вычисление вклада от интегрирования по l_1 и l_2 тем же способом, что при выводе формулы Кирхгофа–Гельмгольца (см. раздел 2.2), приводит к тождеству $G(z, x) = G(x, z)$.

Теорема 3. Если $G(x, y)$ — функция Грина для однородной задачи Дирихле в области D , то однородная краевая задача для уравнения Пуассона

$$\Delta p(x) = -f(x), \quad x \in D, \quad p|_l = 0, \quad (4.18)$$

обладает следующим решением, выписанным в точной явной форме:

$$p(x) = \int_D G(x, y) f(y) dy. \quad (4.19)$$

Доказательство. Применим формулу Грина к паре функций $u_1(y) = p(y)$, $u_2(y) = G(x, y)$ в области \tilde{D} , образованной из D удалением малой ε -окрестности точки x :

$$\int_{\tilde{D}} G(x, y) f(y) dy = \int_{\tilde{D}} (p \Delta_y G - G \Delta p) dy = \int_{l+l_\varepsilon} \left(p \frac{\partial G}{\partial n_y} - G \frac{\partial p}{\partial n_y} \right) dl_y. \quad (4.20)$$

Интеграл по контуру l равен нулю, так как обе функции удовлетворяют однородным граничным условиям. Далее второй член в (4.20) не дает вклада по l_ε , когда $\varepsilon \rightarrow 0$, так как p и $\partial p / \partial n$ регулярны внутри D и G обладает лишь слабой (т.е. интегрируемой) особенностью. Вклад первого слагаемого вычисляется в схожей манере, как и вывод интегральной формулы Кирхгофа–Гельмгольца, что окончательно приводит к соотношению (4.19). Теорема доказана.

Из данной теоремы следует, что спектральная задача для лапласиана (4.2) может быть сведена к задаче на характеристические значения для самосопряженного интегрального оператора, ядро которого является функцией Грина:

$$p = \mu Gp \sim p(x) = \mu \int_D G(x, y) p(y) dy, \quad x \in D. \quad (4.21)$$

В чем разница между самосопряженной задачей для положительного определенного оператора (4.2) и самосопряженной задачей (4.21)? Другими словами, почему мы предпочитаем изучение уравнения (4.21) вместо (4.2)? Ответ вполне очевиден. Наиболее полные результаты для операторных уравнений получены в гильбертовом пространстве, и естественным гильбертовым пространством здесь является $L_2(D)$. Из двух операторов (4.2), (4.21) последний действует в $L_2(D)$, а первый может быть применен только для дважды дифференцируемых функций и, таким образом, не действует в $L_2(D)$.

Теперь в нашем спектральном анализе можно применить хорошо развитую теорию Фредгольма (см. раздел 1.5) к интегральному уравнению второго рода (4.21) с симметричным ядром $G(x, y)$. Дальнейшие результаты основаны на объединении теории Фредгольма с некоторыми свойствами положительно определенных операторов. Это возможно, так как (4.2) \sim (4.21).

Прежде всего из четвертой теоремы Фредгольма следует, что частотный спектр внутренней акустической задачи для произвольной области D дискретен и количество собственных значений ω_m счетно. Далее единственным предельным значением для спектральных чисел может быть только бесконечность, т. е. $\omega_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty \sim k_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. Что еще можно сказать об этих собственных значениях k_m ? Следующие свойства собственных значений вытекают из классических результатов общей спектральной теории для операторного уравнения (4.2) или (4.21).

Теорема 4. *Все собственные значения самосопряженного оператора G в комплексном гильбертовом пространстве H вещественны.*

Доказательство. Пусть $G: H \rightarrow H$ и пусть существуют собственное значение λ и $u \neq 0$ такое, что $Gu = \lambda u$. Тогда $\lambda(u, u) = (Gu, u) = (u, Gu) = (u, \lambda u) = \bar{\lambda}(u, u)$, так что $\lambda = \bar{\lambda}$, т. е. λ и в самом деле вещественно.

Следствие. *Все собственные значения однородной внутренней акустической задачи вещественны, что напрямую вытекает из симметрии оператора G в уравнении (4.21), $\mu = 1/\lambda$, действующего в $L_2(D)$.*

Теорема 5. *Все собственные значения произвольного оператора G , положительно определенного на некотором подмножестве произвольного гильбертового пространства H , положительны.*

Доказательство. Пусть $G: V \rightarrow H$, $V \subset H$, и $(Gu, u) \geq \gamma^2(u, u)$. Если существует вещественное число λ и $u \neq 0$ такие, что $Gu = \lambda u$, то при условиях теоремы 5

$$(Gu, u) = \lambda(u, u) \sim \lambda = (Gu, u)/(u, u) \geq \gamma^2 > 0. \quad (4.22)$$

Следствие. Все собственные значения однородной внутренней акустической задачи положительны.

Это вытекает из положительной определенности операторного уравнения (4.2) на подмножестве $C_2(D) \subset L_2(D) = H$.

Теорема 6. Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям произвольного симметричного оператора, ортогональны друг другу.

Доказательство. Если для уравнения (4.21) мы имеем $Gu_i = \lambda_i u_i$, $Gu_j = \lambda_j u_j$, $u_i \neq 0$, $u_j \neq 0$, тогда $\lambda_i(u_i, u_j) = (Gu_i, u_j) = (u_i, Gu_j) = \lambda_j(u_i, u_j)$. Поэтому если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $(u_i, u_j) = 0$.

Будем считать, что набор собственных функций u_i , $i = 1, 2, \dots$, нормирован: $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Теперь приведем классическую теорему Гильберта–Шмидта, которая представлена в литературе в различных формах. Для рассматриваемых приложений сформулируем ее в следующей версии, которая в действительности является одним из многочисленных следствий этой теоремы.

Теорема (Гильберта–Шмидта). Если симметричное ядро интегрального уравнения (4.21) удовлетворяет условию

$$\int_D |G(x, y)|^2 dy \leq A \quad (4.23)$$

с положительной постоянной A равномерно по $x \in D$, то ядро может быть разложено в ряд по его собственным функциям

$$G(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}}{\lambda_m}, \quad (4.24)$$

который сходится равномерно по $(x, y) \in D$.

Доказательство опустим. Оно основано на некоторой конструктивной технике, связанной с аппроксимацией ядра конечномерными структурами, подобными некоторым вырожденным ядрам.

Следствие 1. Сумма ряда $\sum_{m=1}^{\infty} (1/\lambda_m^2)$ конечна.

В самом деле, двойное скалярное произведение в тождестве (4.24) дает

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} = \iint_D |G(x, y)|^2 dx dy \leq A S(D). \quad (4.25)$$

Следствие 2. Если в условиях теоремы 7 функция Грина $G(x, y)$ непрерывна, то сумма ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} = \int_D G(x, x) dx < \infty \quad (4.26)$$

конечна.

Этот результат получается прямым интегрированием соотношения (4.24).

Примечания

1. Основная цель настоящей главы — изучение внутренней акустической задачи, описанной уравнением Гельмгольца

$$\Delta p(x) + k^2 p(x) = 0, \quad x \in D, \quad (4.27)$$

с некоторыми граничными условиями типа Дирихле или Неймана, заданными на границе ∂D .

Данная задача может быть сведена к ГИУ при помощи той же техники, что и в главе 2. В регулярных случаях это уравнение допускает применение прямых численных методов, как показано в разделе 1.5. Поэтому исследование собственных частот, при которых задача не регулярна, весьма важно в данной теории.

2. Из вышеизложенного анализа следует, что каждая λ_i может быть связана только с конечным числом собственных линейно независимых функций. Иначе эта λ_i была бы предельной точкой для набора $\{\lambda_m\}$. Количество линейно независимых собственных функций, связанных с собственным значением λ_i , называется *кратностью* λ_i .

3. Что мы уже знаем о распределении $\{\lambda_m\}$? Они все положительны, образуют дискретный набор с единственной предельной точкой на бесконечности $\lambda_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. Кратность любого λ_m конечна. Следовательно, их можно упорядочить по возрастанию: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, учитывая каждое собственное значение столько раз, какова его кратность.

4. Сходимость ряда (4.25), образованного обратными квадратами характеристических чисел, показывает, что асимптотическое поведение λ_m : $\lambda_m^{-1} = o(1/\sqrt{m})$, $m \rightarrow \infty$, но это слишком грубая оценка. Если бы функция Грина в уравнении (4.21) была непрерывной, то зависимость (4.26) привела бы к оценке $\lambda_m^{-1} = o(1/m)$, $m \rightarrow \infty$. Тем не менее функция Грина $G(x, y)$ как ядро интегрального оператора в (4.21) имеет логарифмическую особенность $\sim \ln |x - y|$, когда $|x - y| \rightarrow 0$, так что вторая оценка несправедлива. По логике, логарифмическая особенность весьма слаба, и можно ожидать, что данная оценка очень близка к точной в смысле скорости возрастания λ_m . Эта эвристическая идея выглядит достаточно разумной, так как ниже мы увидим, что истинная оценка $\lambda_m^{-1} = O(1/m)$.

5. Строго говоря, число собственных значений и соответствующих собственных функций может оказаться конечным, однако можно доказать, что такое случается, лишь если ядро симметричного интегрального оператора вырождено [30]. Функция Грина для простой ограниченной связной области — невырожденная.

6. Обычно система ортонормированных функций $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, образует базис в гильбертовом пространстве H , если эта система полна в H . Теорема 6 утверждает, что собственные значения составляют ортонормированную систему, но ничего не говорит о замкнутости системы. Это непростой вопрос, но в некоторых случаях можно строго доказать, что собственные функции образуют полное подмножество (сравните с теорией рядов Фурье с тригонометрическим базисом). Тем не менее обычно доказательство требует более скрупулезного анализа, который выходит за рамки настоящей книги.

4.2. Явные формулы для собственных частот круглого диска

Для круглого диска радиуса a уравнение Гельмгольца $\Delta p + k^2 p = 0$ может быть выражено в полярной системе координат в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + k^2 p = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (4.28)$$

Можно искать его решение как разложение Фурье по θ , $0 \leq \theta < 2\pi$:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(r) e^{in\theta}. \quad (4.29)$$

Тогда для каждого $p_n(r)$ вследствие линейной независимости тригонометрических функций приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$r^2 p_n''(r) + r p_n'(r) + (r^2 k^2 - n^2) p_n(r) = 0, \quad (4.30)$$

решение которого, регулярное внутри диска, является функцией Бесселя первого рода порядка n [1]:

$$p_n(r) = J_n(kr). \quad (4.31)$$

Следовательно, полная система линейно независимых решений уравнения (4.28) имеет вид $\{J_n(kr) * e^{in\theta}\}$, $|n| < \infty$. Тем не менее, так как $J_n(x) = (-1)^n J_n(x)$, она может быть выбрана в виде $\{J_n(kr) e^{\pm in\theta}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и соответственно набор собственных значений для краевых задач Дирихле и Неймана может быть найден из трансцендентных уравнений

$$J_n(ka) = 0, \quad J_n'(ka) = 0. \quad (4.32)$$

Здесь мы рассмотрим задачу вычисления больших собственных значений для уравнения (4.32). С этой целью воспользуемся асимптотическим представлением для функций Бесселя. Естественная сложность — существование совершенно разных асимптотик функций Бесселя для случаев большого аргумента и большого порядка. Данный факт очень важен, так как индекс n в (4.32) может быть произвольно большим. Естественное следствие — необходимость применения равномерного асимптотического разложения, справедливого для произвольных значений n и k .

Вычислим количество собственных значений $\lambda_m = k_m^2$, не превышающих n : $N(n) = \sum_{k_m \leq n} 1$. Наше изложение следует работам [28] и [4].

Ясно, что

$$N(n) = N_0(n) + 2 \sum_{m=1}^{[n]} N_m(n), \quad (4.33)$$

так как только одна собственная функция связана с функцией Бесселя нулевого порядка, а для других порядков существуют две различные собственные функции, соответствующие разным знакам экспоненциальной функции, зависящей от полярной координаты. Здесь $N_m(n)$ равно количеству нулей функции Бесселя $J_m(x)$ на отрезке $m < x \leq n$: $N_m(n) = \sum_j 1$, $J_m(x_j) = 0$, $m < x_j \leq n$, а $[n]$ означает целую часть n .

Кроме того, мы подразумеваем справедливость равенства (4.33), опираясь на достаточно классический результат, состоящий в том, что все положительные нули функции Бесселя больше, чем ее порядок: $J_i(x_j) = 0$, и, следовательно, $x_j > i$ [1].

Введем два целых числа ν_0, ν_1 : $0 < \nu_0(n) < \nu_1(n) < [n]$, оба положительные и меньшие, чем $[n]$, причем такие, что $\nu_0(n) = [n^{1/3}]$, $\nu_1(n) = [n - n^{4/9}]$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{[n]} N_m(n) &= \sum_{m=1}^{\nu_0(n)} N_m(n) + \sum_{m=\nu_0+1}^{\nu_1(n)} N_m(n) + \sum_{m=\nu_1+1}^{[n]} N_m(n) = \\ &= S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Оценим каждую из этих сумм отдельно.

Для того чтобы оценить последние две суммы S_2 и S_3 , применим следующую асимптотику функций Бесселя $J_m(x)$ [1]:

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{x^2 - m^2}}} \left\{ \cos \left[\eta(x, m) - \frac{\pi}{4} \right] + O\left(\frac{1}{\eta}\right) + O\left(\frac{1}{m}\right) \right\}, \quad (4.35)$$

которая справедлива равномерно по крайней мере на интервале $\nu_0(x) \leq m \leq \nu_1(x)$, где, как и выше, $\nu_0(x) = x^{1/3}$, $\nu_1(x) = x - x^{4/9}$. Здесь

в представлении (4.35)

$$\eta(x, m) = \sqrt{x^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{x}. \quad (4.36)$$

Заметим, что $\partial \eta(x, m) / \partial x = \sqrt{x^2 - m^2} / x \geq 0$, если $x \geq m$, так что функция $\eta(x, m)$ — монотонно возрастающая функция первого аргумента x . Это позволяет сделать вывод, что отрезок $m \leq x \leq n$ соответствует (со взаимно-однозначным отображением) отрезку $0 \leq \eta(x, m) \leq \eta(n, m)$. Тогда из (4.30), (4.31) получаем, что количество нулей x_j функции $J_m(x)$: $J_m(x_j) = 0$ на отрезке $m \leq x_j \leq n$ совпадает с количеством нулей функции $\cos(\eta - \pi/4)$ на интервале $0 \leq \eta \leq \eta(n, m)$. Так как последняя величина, очевидно, равна $\eta(n, m)/\pi + 1/4$, можно заключить, что асимптотически

$$N_m(n) = \frac{\eta(n, m)}{\pi} + \frac{1}{4}, \quad \nu_0(n) \leq m \leq \nu_1(n). \quad (4.37)$$

Теперь первая сумма S_1 в уравнении (4.34) может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{m=1}^{\nu_0} N_m(n) = \sum_{m=1}^{\nu_0} [N_{\nu_0}(n) + N_m(n) - N_{\nu_0}(n)] = \\ &= \nu_0 N_{\nu_0}(n) + \sum_{m=1}^{\nu_0} [N_m(n) - N_{\nu_0}(n)]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Здесь общий член под знаком суммы допускает оценку

$$N_m(n) - N_{\nu_0}(n) \leq N_0(n) - N_{\nu_0}(n). \quad (4.39)$$

Далее необходимо использовать классический результат о количестве положительных нулей функции Бесселя $J_0(x)$, не превосходящих большую величину n . Из асимптотического представления функции Бесселя для больших аргументов [1]

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x} \right) \right] \quad (4.40)$$

следует, что искомые нули $J_0(x)$ асимптотически совпадают с нулями косинуса в представлении (4.40):

$$N_0(n) = \frac{n}{\pi} + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.41)$$

Для завершения оценки (4.39) заметим, что

$$\eta(\nu_0, n) = \sqrt{n^2 - [n^{1/3}]^2} - ([n^{1/3}] - 1) \arccos \frac{[n^{1/3}] - 1}{n} = n + O(n^{1/3}), \quad (4.42)$$

так что окончательно, принимая во внимание уравнения (4.37)–(4.39), (4.41), (4.42), получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= \nu_0 N_{\nu_0}(n) + \nu_0 \left\{ \left[\frac{n}{\pi} + O(n^{1/3}) \right] - \left[\frac{n}{\pi} + o(1) \right] \right\} = \\ &= \frac{n}{\pi} \nu_0 + O(n^{2/3}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Для того чтобы оценить сумму S_3 в уравнении (4.29), заметим, что

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{m=\nu_1+1}^{[n]} N_m(n) \leq \sum_{m=\nu_1+1}^{[n]} N_{\nu_1+1}(n) = \\ &= \{[n] - (\nu_1 + 1)\} \left\{ \frac{\eta(n, \nu_1+1)}{\pi} + \frac{1}{4} + o(1) \right\} = \\ &= \{n^{4/9} + O(1)\} \left\{ \frac{\eta(n, \nu_1+1)}{\pi} + O(1) \right\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Вычислим значение выражения во вторых скобках. Имеем

$$\begin{aligned} \eta(n, \nu_1 + 1) &= \sqrt{n^2 - (n - n^{4/9})^2} - (n - n^{4/9}) \arccos \frac{n - n^{4/9}}{n} + O(1) = \\ &= \sqrt{2n^{13/9} - n^{8/9}} - (n - n^{4/9}) \arccos(1 - n^{-5/9}) + O(1). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Далее воспользуемся рядом Тейлора для арккосинуса:

$$\arccos(1 - x) = \sqrt{2x} \left\{ 1 + \frac{x}{12} + O(x^2) \right\}, \quad x \rightarrow +0. \quad (4.46)$$

Следовательно, главный асимптотический член в (4.45)

$$\begin{aligned} \eta(n, \nu_1+1) &= \\ &= \sqrt{2} n^{13/18} \left(1 - \frac{n^{-5/9}}{2} \right)^{1/2} - (n - n^{4/9}) \sqrt{2} n^{-5/18} \left(1 + \frac{n^{-5/9}}{12} \right) = \\ &= \left\{ \sqrt{2} n^{13/18} - \frac{\sqrt{2}}{4} n^{1/6} \right\} - \left\{ \sqrt{2} n^{13/18} - \sqrt{2} n^{1/6} + \frac{\sqrt{2}}{12} n^{1/6} \right\} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2} n^{1/6} \end{aligned} \quad (4.47)$$

и, таким образом,

$$S_3 = O(n^{4/9} \times n^{1/6}) = O(n^{11/18}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.48)$$

Вторая сумма S_2 в (4.29) оценивается на основе некоторых тонких результатов, относящихся к теореме Ван дер Корпута из теории чисел [119]. В [28] доказано, что

$$S_2 = \int_{\nu_0(n)}^{\nu_1(n)} \left\{ \frac{\eta(n, \nu)}{\pi} - \frac{1}{4} \right\} d\nu + O(n^{2/3}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.49)$$

Собирая вместе оценки (4.41), (4.45), (4.48), (4.49), приходим к следующему асимптотическому соотношению:

$$N(n) = N_0(n) + 2(S_1 + S_2 + S_3) = \\ = \frac{n}{\pi} + 2 \left\{ \frac{n}{\pi} \nu_0 + \int_{\nu_0(n)+1/2}^{\nu_1(n)+1/2} \left(\frac{\eta(n, \nu)}{\pi} - \frac{1}{4} \right) d\nu \right\} + O(n^{2/3}). \quad (4.50)$$

Здесь интеграл как табличный [20] может быть вычислен точно:

$$\int \eta(n, \nu) d\nu = \frac{3}{4} \nu \sqrt{n^2 - \nu^2} + \frac{\pi}{4} n^2 - \left(\frac{\nu^2}{2} + \frac{n^2}{4} \right) \arccos \frac{\nu}{n}, \quad (4.51)$$

так что

$$\int_{\nu_0(n)+1/2}^{\nu_1(n)+1/2} \eta(n, \nu) d\nu = \frac{\pi}{8} n^2 - n^{4/3} - \frac{n}{2} + O(n^{2/3}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.52)$$

где мы воспользовались разложением (4.51), а также оценкой

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x + O(x^3), \quad x \rightarrow 0. \quad (4.53)$$

Подстановка (4.53) в (4.50) окончательно приводит к следующей асимптотической формуле:

$$N(n) = \frac{n}{\pi} + 2 \left\{ \frac{n^{4/3}}{\pi} + \left(\frac{n^2}{8} - \frac{n^{4/3}}{\pi} - \frac{n}{2\pi} - \frac{1}{4}n \right) \right\} + O(n^{2/3}) = \\ = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + O(n^{2/3}), \quad (4.54)$$

которая для диска радиуса $r = 1$ эквивалентна выражению

$$N(n) = \frac{S}{4\pi} n^2 - \frac{L}{4\pi} n + O(n^{2/3}), \quad (4.55)$$

так как $S = \pi r^2 = \pi$, $L = 2\pi r = 2\pi$ (S — площадь диска и L — его периметр).

Примечания

1. Аналогично анализу, проведенному выше, можно показать, что в случае акустически твердой границы получается достаточно схожий результат

$$N(n) = \frac{S}{4\pi} n^2 + \frac{L}{4\pi} n + O(n^{2/3}). \quad (4.56)$$

2. Г. Вейль [130] был первым, кто предположил, что формулы (4.55) и (4.56) для краевых задач Дирихле и Неймана универсальны для всех ограниченных акустических областей. Тем не менее в общем случае данное положение до сих пор не доказано. Для некоторых канонических форм оно все же строго доказано, однако существующие

общие теории могут подтвердить только главные асимптотические члены в данных формулах. В следующей главе мы дадим краткий обзор таких фундаментальных теорий.

4.3. Вариационные принципы для собственных значений

Как видно из предыдущего раздела, асимптотика для больших собственных значений в случае канонических областей подчиняется определенной закономерности, и весьма интересно прояснить, остается ли асимптотическое поведение регулярным также и в общем случае. Хороший инструмент для изучения данного вопроса основан на вариационных принципах для собственных значений. Изложим эту теорию согласно классическим идеям [30] и [34].

Вспомним, что лапласиан $A = -\Delta$ является симметричным положительно определенным оператором, действующим из подмножества H_0 гильбертова пространства $H = L_2(D)$, т.е. $A = -\Delta: H_0 = C_2(D) \subset H \rightarrow H$.

Кроме того, было доказано, что A положительно определен только на подмножестве $C_2(D)$, элементы которого удовлетворяют однородным граничным условиям Дирихле или Неймана (см. уравнение (4.4)). В настоящем разделе будем говорить, что функция $u \in H_A$, если она из $C_2(D)$ и удовлетворяет данным однородным граничным условиям.

Определение. Функция $R(u) = (Au, u)/(u, u)$ называется *отношением Рэля*.

Теорема 1. Первое (т.е. минимальное среди всех остальных) собственное значение

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_A} R(u) = R(u_0), \quad u_0 \in H_A. \quad (4.57)$$

Доказательство. Пусть $\eta \in H$ — произвольный элемент из области определения оператора A и α — произвольное положительное число. Тогда $u_0 + \alpha\eta \in H_0$ и

$$R(u_0 + \alpha\eta) = \frac{(A(u_0 + \alpha\eta), (u_0 + \alpha\eta))}{(u_0 + \alpha\eta, u_0 + \alpha\eta)} = \frac{\alpha^2(A\eta, \eta) + 2\alpha(Au_0, \eta) + (Au_0, u_0)}{\alpha^2(\eta, \eta) + 2\alpha(u_0, \eta) + (u_0, u_0)}. \quad (4.58)$$

Так как минимальное значение $R(u)$ достигается на элементе $u = u_0$ таком, что $R'_\alpha(\alpha = 0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} (Au_0, \eta)(u_0, u_0) - (Au_0, u_0)(u_0, \eta) &= 0 \sim (Au_0, \eta) - \lambda_1(u_0, \eta) = 0 \sim \\ &\sim (Au_0 - \lambda_1 u_0, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in H_A. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Таким образом, элемент $Au_0 - \lambda_1 u_0$ ортогонален произвольным элементам η подмножества H_A , которое является всюду плотным в H .

Это возможно, только если $Au_0 - \lambda_1 u_0 = 0 \sim Au_0 = \lambda_1 u_0$, т.е. λ_1 — собственное значение.

Докажем, что λ_1 — минимальное значение. В самом деле, если существует любое другое λ_m такое, что $Au_m = \lambda_m u_m$, $u_m \in H_A$, то

$$\lambda_m = \frac{(Au_m, u_m)}{(u_m, u_m)} \geq \inf_{u \in H_A} \frac{(Au, u)}{(u, u)} = \lambda_1. \quad (4.60)$$

Следует заметить, что установленное вариационное свойство наименьшего собственного значения может быть применено только к элементам с единичной нормой:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_A} (Au, u), \quad \|u\| = 1. \quad (4.61)$$

Теорема 2. Все последующие собственные значения могут быть построены в рамках итерационной вариационной схемы

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \inf_{u \in H_A} R(u) = \inf_{u \in H_A} \frac{(Au, u)}{(u, u)} = (Au_m, u_m), \\ (u, u_n) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, m-1, \quad \|u_n\| = 1. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Доказательство. Пусть $\xi \in H_0$ — произвольный элемент из области определения оператора A . Рассмотрим элемент

$$\eta = \xi - \sum_{n=1}^{m-1} (\xi, u_n) u_n. \quad (4.63)$$

Ясно, что $(\eta, u_n) = 0$, $n = 1, \dots, m-1$, так как

$$(\eta, u_p) = (\xi, u_p) - \sum_{n=1}^{m-1} (\xi, u_n) (u_n, u_p) = (\xi, u_p) - (\xi, u_p) = 0, \quad 1 \leq p \leq m-1, \quad (4.64)$$

(вспомним что собственные функции u_n , относящиеся к разным собственным значениям, взаимно ортогональны). Также ясно, что для произвольного вещественного числа α элемент $u_m + \alpha \eta$ таков, что

$$(u_m + \alpha \eta, u_n) = 0, \quad n = 1, \dots, m-1. \quad (4.65)$$

Значит, функция $u_m + \alpha \eta$ удовлетворяет всем условиям ортогональности (4.62), так что минимум функции

$$R(u_m + \alpha \eta) = \frac{(A(u_m + \alpha \eta), (u_m + \alpha \eta))}{(u_m + \alpha \eta, u_m + \alpha \eta)} \quad (4.66)$$

достигается, когда $\alpha = 0$. Это возможно при выполнении требования $R'_\alpha(\alpha=0) = 0 \sim (Au_m - \lambda_m u_m, \eta) = 0$. Докажем, что то же самое тождество справедливо для функций ξ вместо η . В самом деле,

$$(Au_m - \lambda_m u_m, \xi) = (Au_m - \lambda_m u_m, \eta) + \sum_{n=1}^{m-1} (\xi, u_n) (Au_m - \lambda_m u_m, u_n) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 + \sum_{n=1}^{m-1} (\xi, u_n) [(Au_m, u_n) - \lambda_m (u_m, u_n)] = \sum_{n=1}^{m-1} (\xi, u_n) (u_m, Au_n) = \\
 &= \sum_{n=1}^{m-1} (\xi, u_n) (u_m, \lambda u_n) = 0 \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

(вспомним, что оператор A — самосопряженный). Теперь, по аналогии с теоремой 1, если $(Au_m - \lambda_m u_m)$ ортогональна произвольному элементу плотного подмножества, то этот элемент равен нулю, т. е. $Au_m = \lambda_m u_m$. Таким образом, мы пришли к заключению, что λ_m, u_m являются собственными значениями и собственными функциями соответственно.

Докажем, что λ_m — следующее после λ_{m-1} собственное значение.

Если существует любое другое собственное значение $\tilde{\lambda} > \lambda_m$ такое, что $Av = \lambda v$, то

$$\tilde{\lambda} = \frac{(Av, v)}{(v, v)}, \quad (v, u_n) = 0, \quad n = 1, \dots, m-1. \quad (4.68)$$

Тем не менее если λ_m — минимальный коэффициент Рэлея при тех же условиях ортогональности, то это значит, что $\tilde{\lambda} = R(v) \geq R(u_m) = \lambda_m$. Теорема доказана.

Довольно неудобно строить каждое следующее собственное значение λ_m исходя из ортогональности ко всем предыдущим λ_n ($n = 1, \dots, m-1$). Намного удобнее искать данное λ_m , когда это необходимо, не зная других значений λ_n . Такая возможность вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3 (принцип макси-минимума).

$$\begin{aligned}
 \lambda_m = \max_{\{v_n\}} d(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) \quad \forall v_n \in H, \quad d(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) = \min_{u \in H_A} \frac{(Au, u)}{(u, u)}, \\
 (u, v_n) = 0, \quad n = 1, \dots, m-1. \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для $v_n = u_n$, $n = 1, \dots, m-1$, согласно теореме 2, имеем $\lambda_m = \min_{u \in H_A} (Au, u)/(u, u) = d(\{u_n\}_{n=1}^{m-1})$, где u_n , $n = 1, \dots, m-1$ — предыдущие собственные функции, относящиеся к меньшим собственным значениям $\lambda_n \leq \lambda_m$, $n = 1, \dots, m-1$. Это доказывает, что $\max_{\{v_n\}} d(\{v_n\}_{n=1}^{m-1})$ не меньше, чем λ_m . Если мы докажем, что для любого другого набора элементов $\{v_n\}_{n=1}^{m-1}$ с условиями ортогональности (4.69) $d(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) \leq \lambda_m$, то тем самым завершим доказательство.

Для обоснования данной гипотезы построим специальную функцию \tilde{u} в виде

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^m c_j u_j, \quad R(\tilde{u}) \leq \lambda_m. \quad (4.70)$$

Для этого подчиним данную функцию условиям ортогональности с выбранным набором $\{v_n\}_{n=1}^{m-1}$, $(\tilde{u}, v_n) = 0$, $n = 1, \dots, m-1$, что приводит к линейной алгебраической системе

$$\sum_{j=1}^m c_j (u_j, v_n) = 0, \quad n = 1, \dots, m-1, \quad (4.71)$$

с $(m-1)$ уравнениями для m неизвестных c_j , $j = 1, \dots, m$. Очевидно, что ранг матрицы $\{a_{nj}\} = \{u_j, v_n\}$ не выше, чем $m-1$, т.е. строго меньше, чем количество неизвестных m . Из общих результатов линейной алгебры следует, что в этом случае система наверняка обладает нетривиальным решением (см., например, [31]), которое можно сделать нормированным: $\sum_{j=1}^m c_j^2 = 1$. Так как

$$(\tilde{u}, \tilde{u}) = \sum_{i,j=1}^m c_i c_j (u_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^m c_i c_j = \sum_{i=1}^m c_i^2 = 1 \quad (4.72)$$

(вспомним что $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, — ортонормированная система), то

$$\begin{aligned} R(\tilde{u}) = (A\tilde{u}, \tilde{u}) &= \sum_{i,j=1}^m c_i c_j (Au_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^m c_i c_j \lambda_i (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i^2 \leq \\ &\leq \lambda_m \sum_{i=1}^m c_i^2 = \lambda_m. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Таким образом, мы нашли элемент $\tilde{u} \neq 0$, для которого $(A\tilde{u}, \tilde{u}) / (\tilde{u}, \tilde{u}) \leq \lambda_m$ и который ортогонален ко всем v_n , $n = 1, \dots, m-1$. Следовательно, минимум отношения Рэлея $R(u) = (Au, u) / (u, u)$ в классе функций, ортогональных ко всем v_n , $n = 1, \dots, m-1$, не может быть шире, чем единственный элемент λ_m . Поскольку этот минимум и есть $d(\{v_n\}_{n=1}^{m-1})$, то *теорема доказана*.

Определение. Пусть $A: H_A \subset H \rightarrow H$ и $B: H_B \subset H \rightarrow H$ и оба оператора положительно определены: $(Au, u) \geq \gamma_A^2(u, u)$, $(Bu, u) \geq \gamma_B^2(u, u)$ $\forall u \in H_A, H_B$. Мы говорим, что $A \geq B$ если $(Au, u) \geq (Bu, u)$ для всех $u \in H_A, H_B$.

Теорема 4. Если $A \geq B$, то $\lambda_m^A \geq \lambda_m^B \quad \forall m = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Если по определению $(Au, u) \geq (Bu, u)$, для любого $u \in H_A, H_B$, то

$$\begin{aligned} d_A(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) &= \min_u \frac{(Au, u)}{(u, u)} \geq \min_u \frac{(Bu, u)}{(u, u)} = d_B(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}), \\ (u, v_n) &= 0, \quad n = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Из этого неравенства следует, что

$$\lambda_m^A = \max_{\{v_n\}} d_A(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) \geq \max_{\{v_n\}} d_B(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) = \lambda_m^B \quad \forall v_n \in H, \quad (4.75)$$

что и требовалось доказать.

Как наиболее важное следствие из данной теоремы докажем следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть D_A — подобласть области D_B : $D_A \subset D_B$. Тогда для однородных краевых задач с условием $u|_{\partial D} = 0$ выполняется неравенство $\lambda_m^B \leq \lambda_m^A \quad \forall m = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Докажем теорему в случае двумерной задачи Дирихле. Трехмерный случай может быть доказан по аналогии.

Ясно, что $H_A \subset H_B$. В самом деле, если $u \in H_A$, то $u|_{\partial A} = 0$ и, как следует из (4.3),

$$\begin{aligned} (Au, u) &= \int_{D_A} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \int_{D_B} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = (Bu, u), \end{aligned} \quad (4.76)$$

если функция $u(x, y)$ продолжена значением $u(x, y) \equiv 0$ на $D_B \setminus D_A$. Таким образом, мы доказали, что $(Au, u) = (Bu, u)$ для всех $u \in H_A$. Теперь, так как $H_A \subset H_B$, это влечет

$$d_B(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) = \inf_{u \in H_B} \frac{(Bu, u)}{(u, u)} \leq \inf_{u \in H_A} \frac{(Au, u)}{(u, u)} = d_A(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) \quad (4.77)$$

и, таким образом,

$$\lambda_m^B = \max_{\{v_n\}} d_B(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) \leq \max_{\{v_n\}} d_A(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) \leq \lambda_m^A, \quad (4.78)$$

что и требовалось доказать.

В приложении к нашим конкретным данная теорема гласит, что собственные частоты для однородной внутренней акустической задачи для некоторой области D не выше, чем для любой ее подобласти с тем же типом однородных граничных условий.

Более глубокий вывод из теоремы 4 формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 6. Пусть D — область, составленная из конечного числа подобластей D_i , $i = 1, \dots, I$, так что $D = \bigcup_{i=1}^I D_i$, $\bigcap_{i=1}^I D_i = 0$. Пусть $\{\lambda_m^*\}$ обозначает упорядоченный набор собственных значений, собранных вместе из однородной краевой задачи Дирихле для всех подобластей D_i . Если $\{\lambda_m\}$ являются собственными значениями соответствующей однородной задачи для области D , то $\lambda_m \leq \lambda_m^*$.

Доказательство. Сравним две задачи: 1) данная задача на собственные значения в области D с данными однородными граничными условиями на границе ∂D ; 2) та же проблема с дополнительным ограничением $u = 0$ (или $\partial u / \partial n = 0$) на граничных кривых для всех подобластей.

По аналогии с доказательством предыдущей теоремы можно утверждать, что $H_2 \subset H_1$, так как любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая всем условиям задачи 2, удовлетворяет тем же условиям задачи 1 (т.е. заданным граничным условиям на ∂D). Следовательно, на классе функций $u \in H_2$ имеем $(A_1 u, u) = (A_2 u, u)$ и, так как $H_2 \subset H_1$, то

$$d_1(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) = \inf_{u \in H_1} \frac{(A_1 u, u)}{(u, u)} \leq \inf_{u \in H_2} \frac{(A_2 u, u)}{(u, u)} = d_2(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}). \quad (4.79)$$

Доказательство завершается замечанием о том, что (4.79) приводит к неравенству

$$\lambda_m = \lambda_m^{(1)} = \max_{v_n} d_1(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) \leq \max_{\{v_n\}} d_2(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) = \lambda_m^{(2)} = \lambda_m^*, \quad (4.80)$$

поскольку набор $\{\lambda_m^{(2)}\}$ образован объединением всех собственных значений для всех частных задач для каждой подобласти D_i . Это и доказывает теорему.

Следствие. Пусть при условиях теоремы 5 число $N(\lambda)$ обозначает количество собственных значений (вычисленных с учетом их кратности), не превышающих $\lambda > 0$, для данной однородной краевой задачи Дирихле. Пусть $N^*(\lambda)$ обозначает общее количество аналогичных величин для каждой подобласти D_i : $N^*(\lambda) = \sum_{i=1}^I N_i(\lambda)$.

Тогда $N(\lambda) \geq N^*(\lambda)$.

В случае граничных условий Неймана $\partial u / \partial n|_{\partial D} = 0$ результат аналогичен доказанному в теореме 6 и формулируется в следующем виде.

Теорема 7. Пусть $\{\lambda_m\}$ обозначает набор возрастающих собственных значений, каждое взято соответственно его кратности и $\{\lambda_m^*\}$ обозначает упорядоченный набор собственных значений для всех подобластей D_i , $i = 1, \dots, N$: $D = \bigcup_{i=1}^I D_i$, $\bigcap_{i=1}^I D_i = \emptyset$. Тогда $\lambda_m \geq \lambda_m^* \quad \forall m = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Снова рассмотрим две задачи, описанные в условиях теоремы (задачи 1 и 2 соответственно). Вспомним, что допустимый класс функций в H_1 состоит из тех функций с кусочно-непрерывными первыми производными, для которых $(\partial u / \partial n) / \partial D = 0$. Это автоматически подразумевает, что функция из H_1 непрерывна. Расширим данный класс, отказываясь от непрерывности u . Очевидно, что функционал $R(u)$ в этом расширенном классе функций выглядит как функ-

ционал на функциях с однородными граничными условиями для каждого D_i : $(\partial u / \partial n)|_{\partial D_i} = 0$. Таким образом, можно утверждать, что две указанные задачи покрывают множества H_1 и H_2 , $H_1 \subset H_2$. Отсюда

$$d_2(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) = \inf_{u \in H_2} R_2(u) \leq \inf_{u \in H_1} R_1(u) = d_1(\{v_n\}_{n=1}^{m-1}) \quad (4.81)$$

и, таким образом, по аналогии с предыдущей теоремой $\lambda_m^* \geq \lambda_m$.

Следствие. При условиях данной теоремы $N(\lambda) \leq N^*(\lambda) = \sum_{i=1}^I N_i(\lambda)$.

Следующая теорема сравнивает собственные частоты однородных задач Дирихле и Неймана.

Теорема 8. Пусть через $\{\lambda_m^D\}$ обозначен набор собственных значений задачи Дирихле и через $\{\lambda_m^N\}$ — аналогичные собственные значения задачи Неймана. Тогда $\lambda_m^N \leq \lambda_m^D$, $m = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Сравним две максиминные задачи: 1) для класса функций с кусочно-непрерывными первыми производными, с ограничением $u|_{\partial D} = 0$; 2) ту же задачу в том же классе функций, но без условия на границе.

Первый класс максиминных задач порождает все собственные значения однородной задачи Дирихле $\{\lambda_m^D\}$. Второй класс шире. Кроме того, он содержит функции с кусочно-непрерывными первыми производными, для которых функционал $R(u)$ выглядит так же, как в случае, где они были бы подчинены граничному условию Неймана на ∂D . Тогда можно доказать последовательными шагами, как и в предыдущих теоремах, что собственные значения на более широком классе не превышают собственные значения для более узкого класса: $\lambda_m^N \leq \lambda_m^D$.

Примечание. Следует заметить, что величина $N(\lambda)$ для обеих краевых задач есть величина, обратная к λ_m . Это подразумевает, в частности, что $N_D(\lambda) \leq N_N(\lambda)$. Точная оценка собственных значений в задаче на круглом диске (формулы (4.55), (4.56)) подтверждает данный вывод.

4.4. Теория Вейля–Карлемана распределения собственных значений

Пусть D — двумерная односвязная область площадью S с границей конечной длины l . Наиболее прямой путь для описания теории Вейля–Карлемана — это последовательно двигаться от простых форм к более сложным.

Начнем с прямоугольной области произвольного размера $a \times b$: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Собственные функции однородных краевых задач Дирихле и Неймана есть соответственно

$$\begin{aligned} u_{nm}^D(x, y) &= \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} \quad (n, m = 1, 2, \dots), \\ u_{nm}^N(x, y) &= \cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Вследствие теоремы Вейерштрасса тригонометрическая система (4.82) образует ортогональную систему в D . Кроме того, функции удовлетворяют соответствующим однородным граничным условиям. Это доказывает, что не существует других собственных функций, так как любая новая собственная функция должна быть ортогональна всем $u_{nm}(x, y)$ (теорема 6, раздел 4.1), что невозможно.

Собственные значения обеих задач выражаются в явном виде:

$$\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.83)$$

Вычислим $N(\lambda)$ — количество собственных значений λ_{nm} , которые меньше или равны λ . Они определяются количеством неотрицательных решений неравенства

$$\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \leq \lambda \sim \frac{\pi^2}{\lambda} \frac{n^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{\lambda} \frac{m^2}{b^2} \leq 1. \quad (4.84)$$

Эти решения размещаются на сетке целочисленной прямоугольной системы координат (n, m) , $n, m = 0, 1, 2, \dots$. Они связаны с узлами, лежащими внутри эллипса с полуосями $\tilde{a} = a\sqrt{\lambda}/\pi$ и $\tilde{b} = b\sqrt{\lambda}/\pi$.

Можно легко показать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{(\pi \tilde{a} \tilde{b} / 4)} = 1 \implies N(\lambda) = \frac{ab\lambda}{4\pi} = \frac{S}{4\pi} \lambda + o(\lambda), \quad (4.85)$$

т.е. асимптотически количество мод внутри четверти эллипса равно площади последнего $\pi \tilde{a} \tilde{b} / 4$. В формуле (4.85) S — площадь прямоугольника $S = ab$. Оценка остатка показывает, что [30]

$$N(\lambda) = \frac{S}{4\pi} \lambda + O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.86)$$

Заметим, что данная оценка справедлива для обоих типов граничных условий. Как указывалось выше (см. примечания к разделу 4.2), Г. Вейль [130] предположил, что второй асимптотический член может быть представлен в явном виде

$$N_{D,N}(\lambda) = \frac{S}{4\pi} \lambda \mp \frac{l}{4\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.87)$$

однако доказательство для общего случая пока неизвестно (обзор см. в работе [5]).

В рассматриваемом случае прямоугольной области D размером $a \times b$ асимптотическое соотношение можно обосновать следующим образом. Доказательство базируется на некоторых результатах теории чисел вместе с теоремами Ландау и Ван дер Корпута (см., например, [27, 101, 119]) и дает более точные отношения между площадью указанного выше эллипса и числом целочисленных узлов сетки, расположенных внутри сетки. Результаты данной теории для наших целей формулируются следующим образом. Область эллиптического

сектора $\pi\tilde{a}\tilde{b}/4$ равна количеству точек сетки во внутреннем секторе плюс половине числа точек сетки на линейной части границы данного сектора, с ошибкой порядка $o(\sqrt{\lambda})$:

$$\frac{\pi\tilde{a}\tilde{b}}{4} = N_D(\lambda) + \frac{\tilde{a} + \tilde{b}}{2} + o(\sqrt{\lambda}), \quad (4.88)$$

так как первое решение из (4.82) подразумевает $n, m \geq 1$, т.е. в нем фигурируют только точки сетки, лежащие во внутренней части эллипса. Напротив, в случае задачи Неймана должны быть добавлены точки $(\tilde{a} + \tilde{b})$ с $n = 0$ и $m = 0$ на линейной границе: $N_N(\lambda) = N_D(\lambda) + (\tilde{a} + \tilde{b})$. Окончательно приходим к представлению (вспомним, что $\tilde{a} = a\sqrt{\lambda}/\pi$, $\tilde{b} = b\sqrt{\lambda}/\pi$)

$$\begin{aligned} N_D(\lambda) &= \frac{\pi\tilde{a}\tilde{b}}{4} - \frac{\tilde{a} + \tilde{b}}{2} + o(\sqrt{\lambda}) = \frac{ab}{4\pi}\lambda - \frac{(a+b)}{2\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}) = \\ &= \frac{S}{4\pi}\lambda - \frac{l}{4\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} N_N(\lambda) &= N_D(\lambda) + \frac{a+b}{\pi}\sqrt{\lambda} = \frac{S}{4\pi}\lambda + \frac{a+b}{2\pi}\sqrt{\lambda} + o(\lambda) = \\ &= \frac{S}{4\pi}\lambda + \frac{l}{4\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.90)$$

которое подтверждает общую формулу (4.87) для случая прямоугольной области. Не будем забывать, что второе слагаемое в асимптотическом представлении (4.87) пока не доказано строго для произвольной области. Тем не менее, сравнивая (4.87) с соответствующими результатами, полученными для круглого диска (формулы (4.55), (4.56), полученные для собственных значений, которые являются квадратами собственных чисел), заключаем, что формулы для круглого диска также согласуются с гипотезой Вейля (4.87).

Области, содержащие конечное число подобластей. К сожалению, в общем случае области произвольной формы существующие строгие результаты подтверждают только главный асимптотический член в (4.87). Пусть область D будет объединением конечного числа квадратов D_i со стороной a_i , $i = 1, \dots, I$. Тогда вариационный принцип, изложенный в предыдущем разделе, дает следующую оценку:

$$\sum_{i=1}^I N_i^D(\lambda) \leq N_D(\lambda) \leq N_N(\lambda) \leq \sum_{i=1}^I N_i^N(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.91)$$

Заметим, что $N_i^D = (S_i/4\pi)\lambda + O(\sqrt{\lambda})$, $N_i^N = (S_i/4\pi)\lambda + O(\sqrt{\lambda})$ и $S = \sum_{i=1}^I S_i$, откуда

$$\frac{S}{4\pi}\lambda + O(\sqrt{\lambda}) \leq N_D(\lambda) \leq N_N(\lambda) \leq \frac{S}{4\pi}\lambda + O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.92)$$

Области произвольной формы. Здесь наш вывод будет основываться на аппроксимации произвольной ограниченной простой связной области формами, которые представляют собой объединение меньших участков. Следующая лемма играет ключевую роль в построении.

Лемма. Пусть в плоскости (x, y) имеется двумерная ограниченная область D площади S с длиной периметра l . Если на данной плоскости существует квадратная сетка с малым шагом h , то количество узлов внутри S

$$n_h(D) = \frac{S}{h^2} + O(h^{-1}), \quad h \rightarrow 0. \quad (4.93)$$

Доказательство. В работах В. Ярника (см., например, [27]), который доказывает, что в естественной двумерной прямоугольной системе координат, снабженной ортогональной сеткой с единичным шагом, количество внутренних узлов $n(D)$ удовлетворяет неравенству $|S - n(D)| < l$. При условиях теоремы сделаем замену переменных $\tilde{x} = x/h$, $\tilde{y} = y/h$. Тогда в новой системе координат (\tilde{x}, \tilde{y}) имеем $\tilde{S} = S/h^2$, $\tilde{l} = l/h$, $\tilde{S} - \tilde{l} < n_h(D) < \tilde{S} + \tilde{l}$, или $S/h^2 - l/h < n_h(D) < S/h^2 + l/h$, что и требовалось доказать.

Данная лемма напрямую приводит к основному результату рассматриваемой теории.

Теорема. Асимптотическое поведение больших собственных значений в однородных краевых задачах Дирихле и Неймана для оператора Гельмгольца определяется формулой

$$N(\lambda) = \frac{S}{4\pi} \lambda + O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.94)$$

где S — площадь рассматриваемой двумерной области произвольного размера.

Доказательство. Снабдим плоскость (x, y) ортогональной сеткой с шагом $h = 1/\sqrt{\lambda}$ и рассмотрим область, образованную всеми элементарными квадратами данной сетки, лежащими внутри данной области D . Легко видеть, что количество $n_{sq}(D)$ квадратов во внутренней части D — того же порядка, что и количество внутренних узлов: $n_h(D) = n_{sq}(D) + O(1/h) \sim n_{sq}(D) = n_h(D) + O(\sqrt{\lambda})$, $\lambda \rightarrow \infty$, так что полная площадь внутренних квадратов $S_{sq}^D = n_h(D) h^2 = S + O(h)$, $h \rightarrow 0$, или $S_{sq}(D) = S + O(1/\sqrt{\lambda})$, $\lambda \rightarrow \infty$.

Далее применение вышеупомянутого вариационного принципа приводит к цепочке неравенств

$$N_{sq}^D(\lambda) \leq N_D(\lambda) \leq N_N(\lambda) \leq N_{sq}^N(\lambda), \quad (4.95)$$

где $N_{sq}^D(\lambda)$, $N_{sq}^N(\lambda)$ выражают количество собственных значений, не превышающих λ , в задачах Дирихле и Неймана в области, созданной

внутренними квадратами. Теперь

$$N_{\text{sq}}^{\text{D}}(\lambda) = \frac{S_{\text{sq}}(D)}{4\pi} \lambda + O(\sqrt{\lambda}) \quad (4.96)$$

(см. формулу (4.92)), и получаем оценку

$$N_{\text{sq}}^{\text{D}}(\lambda) = \frac{S}{4\pi} \lambda + O(\sqrt{\lambda}). \quad (4.97)$$

Оценка для $N_{\text{sq}}^{\text{N}}(\lambda)$ получается по аналогии. Собирая вместе асимптотические оценки (4.95)–(4.97), приходим к основному результату

$$\frac{S}{4\pi} \lambda + O(\sqrt{\lambda}) \leq N_{\text{D}}(\lambda) \leq N_{\text{N}}(\lambda) \leq \frac{S}{4\pi} \lambda + O(\sqrt{\lambda}). \quad (4.98)$$

Примечания

1. Вспомним что в рассматриваемой теории $\lambda = \omega^2/c^2$ (ω — частота и c — волновая скорость). Таким образом, количество собственных частот ω_n , не превышающих данную частоту ω , определяется как

$$N(\omega) = \frac{S\omega^2}{4\pi c^2} + O(\omega), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (4.99)$$

Иными словами, количество собственных частот растет как ω^2 , следовательно, в численном моделировании проблема наличия особых значений ω_n , не существенная для низких и средних частот, становится заслуживающей внимания для высоких частот. В самом деле, любой стандартный компьютерный алгоритм разойдется, если частота колебаний совпадает с собственной частотой. С ростом частоты вероятность совпадения с особым значением ω_n возрастает, и численный алгоритм становится менее устойчивым.

2. Асимптотическая формула (4.86) может быть обращена:

$$\lambda_n \sim \frac{4\pi}{S} n + o(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.100)$$

Тем самым доказывается отмеченное выше утверждение о скорости роста λ_n , которое вытекает из теоремы Гильберта–Шмидта для двумерной задачи (см. формулу (4.25)). В самом деле, из соотношения (4.100) ясно, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_n^2) < \infty$.

4.5. Явные результаты для некоторых многоугольников

Предыдущее исследование показало, что точные аналитические результаты могут быть получены для подобластей, где координаты разделяются. Детальное изучение данного вопроса было проведено в работе [27]. Прямоугольная область дает пример разделения в прямоугольной системе координат, и точная форма представления для

собственных функций и собственных частот изложена в разделе 4.4. В полярной системе координат решение на круглом диске точно выражается в терминах функций Бесселя (раздел 4.2). С другой стороны, Макаи [101] вывел точные аналитические формулы для собственных функций и собственных частот для трех типов треугольников, где переменные не разделяются.

В этом разделе мы дадим более полное решение для таких треугольников. Прежде всего мы поймем, почему только эти три типа треугольников допускают точное аналитическое решение. Далее будет построена точная форма представления функции Грина для оператора Гельмгольца в данных областях в виде экспоненциально сходящегося ряда (что не было сделано в вышеприведенных рассуждениях). Но, что более важно, предложенный здесь метод позволит расширить эти результаты для некоторых трехмерных многогранников (см. следующий раздел), где аналогичные результаты получены не были. В построениях мы используем хорошо известную технику мнимых источников. Для большей ясности ограничим наше рассмотрение краевой задачей Неймана (случай акустически твердых граничных поверхностей).

4.5.1. Основы метода мнимых источников. Мы уже неявно сталкивались с методом мнимых источников в разделе 3.5. В самом деле, возникающие слагаемые ряда выражают вклад мнимых (действительно не представленных в слое) источников, расположенных симметрично относительно точечного источника, связанного с предыдущим слагаемым. Таким образом, следующее слагаемое ряда обнуляет нормальную компоненту скорости, порожденную предыдущими мнимыми источниками. В результате приходим к некоторому бесконечному ряду.

В исследовании внутренней задачи акустики для многоугольников начнем с внутренней задачи на клине с углом раствора θ , $0 < \theta < 2\pi$. Можно показать [120], что в общем случае полное волновое поле состоит из компонента геометрической дифракции (обычные отражения, см. ниже раздел 6.3) и волны, рассеянной на угле клина. Последняя исчезает, когда $\theta = \pi/n$, где n — произвольное положительное целое число. По существу, это свойство связано с очевидным утверждением, что только для этих значений θ количество мнимых источников вне клина конечно и равно $2n$ (включая действительный источник). Очевидно, случай $n = 2$ относится к четвертьпространству.

Попытаемся определить класс многоугольников, допускающий точное аналитическое решение. Основное утверждение настоящего раздела состоит в том, что точное решение в явном виде можно построить лишь для тех многоугольников, в которых присутствуют только волны, отраженные от граней клина по законам геометрической теории. Другими словами, каждый угол многоугольника должен иметь вид π/n .

Изучим более детально набор подобных многоугольников. Пусть l — количество сторон, при этом сумма внутренних углов равна $\pi(l - 2)$. С другой стороны, если каждый угол $\theta = \pi/n \leq \pi/2$, то эта

сумма не превышает $\pi l/2$, откуда $\pi(l-2) \leq \pi l/2$, или $l \leq 4$. Тривиальный анализ показывает, что есть только четыре возможных варианта: 1) прямоугольник ($n=2$ для каждого угла); 2) равносторонний треугольник ($n=3$ для каждого угла); 3) равнобедренный прямоугольный треугольник ($n=2$ для одного угла и $n=4$ для других); 4) прямоугольный треугольник, в котором $\theta_1 = \pi/2$ ($n=2$), $\theta_2 = \pi/3$ ($n=3$) и $\theta_3 = \pi/6$ ($n=6$).

4.5.2. Альтернативное представление для прямоугольной области. Основная идея метода мнимых источников для прямоугольника с твердыми стенками ясна из рис. 4.1. Если существует точечный источник (x_0, y_0) : $p_0 = H_0^{(1)} [k\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}]$, расположенный внутри области, то для удовлетворения нулевым граничным условиям для нормальной производной $\partial p / \partial n = 0$ можно организовать двумерный массив мнимых источников. Возникнет специфическая симметрия для произвольной граничной точки на стенке. Отклик в точке приема выражается двумерным рядом.

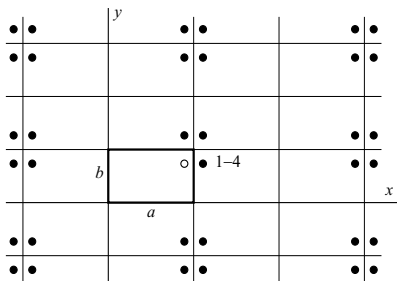


Рис. 4.1. Расположение мнимых источников для прямоугольной области

Данная техника применялась многими авторами в случае импульсного источника [106], когда ряд сходящийся, так как вклад в отклик в текущий момент вносят лишь конечное число мнимых источников. Однако подход применим и к гармоническому процессу и в двумерном случае приводит к следующему результату:

$$p(x_1, y_1) = s(x_0 - x_1, y_0 - y_1, a, b) + s(x_0 + x_1, y_0 - y_1, a, b) + s(x_0 - x_1, y_0 + y_1, a, b) + s(x_0 + x_1, y_0 + y_1, a, b), \quad (4.101)$$

где функция s определяется двойной суммой

$$s(x, y, a, b) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)} \left[k\sqrt{(x + 2am)^2 + (y + 2bn)^2} \right]. \quad (4.102)$$

Хотя решение выражается в явном виде (4.102), ряд не сходится в классическом смысле (см. раздел 1.3). Таким образом, мы не можем воспользоваться расходящимся рядом (4.102) для прямых вычислений.

Для того чтобы корректно трактовать данный ряд, можно работать в рамках принципа *предельного поглощения* (см. раздел 3.2). Если добавить малую мнимую компоненту к волновому числу: $k_\varepsilon = k + i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, то ряд (4.102) становится экспоненциально сходящимся и имеет конечный предел, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, как в методе Пуассона–Абеля обобщенного суммирования (см. раздел 1.3). Тем не менее неясно, как применить данный подход напрямую. Именно поэтому мы разрабатываем другую идею. Так как функция $s(x, y, a, b)$ — периодическая по обоим аргументам, предположим, что $0 \leq x < 2a$, $0 \leq y < 2b$. Тогда используем интегральное представление для функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(k_\varepsilon \sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\alpha)x} \frac{e^{-i\alpha y}}{\gamma(\alpha)} d\alpha, \quad \gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_\varepsilon^2}. \quad (4.103)$$

Таким образом, ряд (4.102) может быть переписан как

$$S(x, y, a, b) = \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\gamma(\alpha)(2am+x)} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\gamma(\alpha)(2am-x)} \right] \times \\ \times \frac{e^{-i\alpha|2bn+y|}}{\gamma(\alpha)} d\alpha. \quad (4.104)$$

Ветвящаяся функция $\gamma(\alpha)$ имеет положительную вещественную часть $\operatorname{Re}[\gamma(\alpha)] > 0$, когда $\varepsilon > 0$ (см. раздел 1.1). Таким образом, последний ряд — это геометрическая прогрессия, и в итоге

$$s(x, y, a, b) = \\ = \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma(\alpha)x} + e^{\gamma(\alpha)(x-2a)}}{1 - e^{-2a\gamma(\alpha)}} \frac{e^{-i\alpha|2bn+y|}}{\gamma(\alpha)} d\alpha = \\ = \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}[(a-x)\gamma(\alpha)]}{\operatorname{sh}[a\gamma(\alpha)]} \frac{e^{-i\alpha|2bn+y|}}{\gamma(\alpha)} d\alpha. \quad (4.105)$$

В данном случае ничто не препятствует применению стандартного разложения по вычетам в простых полюсах, потому что подынтегральное выражение представляет собой экспоненциально затухающую мероморфную функцию с контуром интегрирования, который можно сдвинуть вниз на бесконечность. В результате приходим к следующему

представлению:

$$s(x, y, a, b) = -i \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \frac{\cos(\pi m x/a)}{q_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|2bn+y| q_m/a}, \quad (4.106)$$

$$q_m = \sqrt{(\pi m)^2 - (ak_\varepsilon)^2}, \quad \delta_0 = 1, \quad \delta_m = 2 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Так как вещественная часть величин q_m положительна при $\varepsilon > 0$, последний ряд снова является геометрической прогрессией с суммой, равной

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{(2bn+y)}{a} q_m \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{(2bn-y)}{a} q_m \right] = \\ = \frac{e^{-yq_m/a} + e^{(y-2b)q_m/a}}{1 - e^{-2bq_m/a}} = \frac{\text{ch}[(b-y)q_m/a]}{\text{sh}[bq_m/a]}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Следовательно, окончательное представление ($\varepsilon \rightarrow +0$) может быть получено из (4.106) и (4.107) в виде

$$s(x, y, a, b) = -i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m \cos(\pi m x/a)}{\sqrt{(\pi m)^2 - (ak)^2}} \frac{\text{ch} \left[\sqrt{(\pi m)^2 - (ak)^2} (b-y)/a \right]}{\text{sh} \left[\sqrt{(\pi m)^2 - (ak)^2} b/a \right]}. \quad (4.108)$$

Заметим, что если $0 \leq y < 2b$, то последний ряд сходится экспоненциально, т. е. эти слагаемые убывают как в некоторой геометрической прогрессии с определенным основанием q : $|q| < 1$, когда m бесконечно растет.

4.5.3. Обобщение на более сложные многоугольники. Нелегко обобщить метод мнимых источников на другие многоугольные формы. Нерегулярные формы подразумевают более сложные процедуры нахождения позиций мнимых источников. Важно прояснить внутренние свойства точного решения для прямоугольных форм. Если помотреть на рис. 4.1, то станет ясно, что четыре мнимых источника группируются вокруг каждого угла основного прямоугольника симметрично относительно его сторон, на одинаковом расстоянии от угла. Они соответствуют мнимым источникам в точном решении для точечного источника, помещенного в четвертьплоскости.

Аналогичные построения в применении к упомянутым трем типам треугольников позволяют найти точные аналитические решения.

В случае равностороннего треугольника соответствующий массив мнимых источников показан на рис. 4.2. Из рисунка ясно, что структура решения

$$p(x_1, y_1) = \sum_{i=1}^{12} s(\xi_i - x_1, \eta_i - y_1, a, b), \quad a = \frac{3}{2} c, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} c, \quad (4.109)$$

где c — длина стороны.

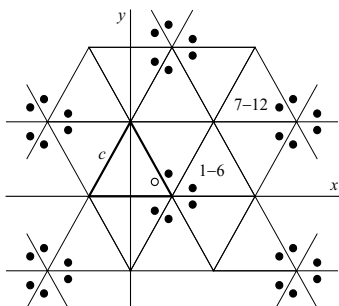


Рис. 4.2. Расположение мнимых источников для равностороннего треугольника

Для равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной a (рис. 4.3) решение может быть выражено в виде

$$p(x_1, y_1) = \sum_{i=1}^8 s(\xi_i - x_1, \eta_i - y_1, a, a). \quad (4.110)$$

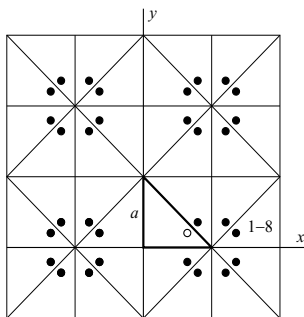


Рис. 4.3. Мнимые источники равнобедренного прямоугольного треугольника

Наконец, структура решения для прямоугольного треугольника с острыми углами 30° и 60° и гипотенузой c (рис. 4.4) также становится ясной:

$$p(x_1, y_1) = \sum_{i=1}^{24} s(\xi_i - x_1, \eta_i - y_1, a, b), \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2} c, \quad b = \frac{3}{2} c. \quad (4.111)$$

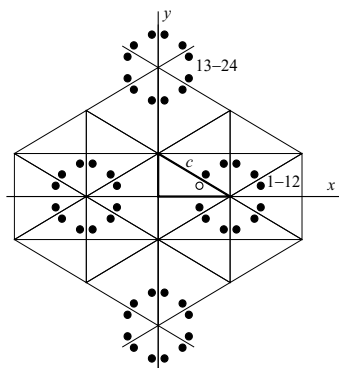


Рис. 4.4. Мнимые источники для прямоугольного треугольника с острыми углами 30 и 60°

4.5.4. Оценка для собственных частот. Собственные значения для волнового числа k определяются из выражения (4.108), когда гиперболический синус в знаменателе становится равным нулю:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \left[\sqrt{(\pi m)^2 - (ak)^2} \, b/a \right] = 0 &\sim \sqrt{(\pi m)^2 - (ak)^2} \, b/a = -\pi n i \sim \\ &\sim k_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \end{aligned} \quad (4.112)$$

для произвольных целых чисел m и n . Для прямоугольной области со сторонами a и b данный результат хорошо известен в литературе. Для треугольных областей получаются следующие новые точные оценки.

1. Равносторонний треугольник с длиной стороны c :

$$k_{mn} = \frac{2\pi}{3c} \sqrt{m^2 + 3n^2}. \quad (4.113)$$

Легко видеть, что для рассматриваемого треугольника первые шесть членов ($i = 1, 2, \dots, 6$) в сумме (4.109) и другие шесть слагаемых ($i = 6, 7, \dots, 12$) компенсируют друг друга, если $(n + m)$ нечетно. В самом деле, второе множество шести мнимых источников получается из первых шести соответствующих источников, если заметить (ξ_i, η_i) на $(\xi_i + a, \eta_i + b)$. Выражение $T_{mn}(x, y) = \cos(\pi m x/a) \times \times \operatorname{ch} [\sqrt{(\pi m)^2 - (ak)^2} (b - y)/a]$ в (4.108) при ограничивающих условиях (4.112) равно $(-1)^{n+m} T_{mn}(x + a, y + b)$. Следовательно, вклады указанных шести пар мнимых источников взаимно уничтожают друг друга, если $(n + m)$ нечетно, и в этом случае особенность в знаменателе выражения (4.108) отсутствует. Следовательно, отсутствуют собственные значения. Отсюда можно сделать вывод, что формула

(4.113) должна быть применена лишь для тех комбинаций m и n , когда $(n + m)$ четны, а это эквивалентно

$$k_{mn} = \frac{2\pi}{3c} \sqrt{m^2 + 3n^2} = \frac{2\pi}{3c} \sqrt{(n + 2l)^2 + 3n^2} = \frac{4\pi}{3c} \sqrt{n^2 + nl + l^2} \sim \\ \sim k_{mn} = \frac{4\pi}{3c} \sqrt{m^2 + mn + n^2} \quad \forall m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.114)$$

2. Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a :

$$k_{mn} = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2}. \quad (4.115)$$

Разумеется, различные собственные функции должны отличаться по форме. Тем не менее с волновым числом, определенным соотношением (4.115), числитель в уравнении (4.108) равен $\cos(\pi mx/a) \cos[\pi n(a - y)/a] = (-1)^n \cos(\pi mx/a) \cos(\pi ny/a)$ (напомним, что $b = a$). Так как знак минус не влияет на форму собственных функций, полученная структура симметрична относительно замены переменных. Таким образом, формула (4.115) должна быть применена лишь при следующих ограничениях:

$$k_{mn} = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2}, \quad m \geq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.116)$$

3. Прямоугольный треугольник с острыми углами 30 и 60° и гипотенузой c :

$$k_{mn} = \frac{2\pi}{3c} \sqrt{3m^2 + n^2}. \quad (4.117)$$

По той же причине, что и в случае 1, вещественный массив собственных значений здесь:

$$k_{mn} = \frac{4\pi}{3c} \sqrt{m^2 + mn + n^2} \quad \forall m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.118)$$

Все три выведенные формулы (4.114), (4.116), (4.118) совпадают с результатами [101], полученными совершенно другим методом.

Примечания

1. Следует заметить, что представление (4.108) также является модовым разложением (сравните с результатами раздела 3.1). Аналогично случаю слоя постоянной толщины несколько первых членов ряда (количество которых зависит от значения волнового числа k) ведет себя как осциллирующая функция. Тогда начиная с $m = [ak/\pi] + 1$ все слагаемые экспоненциально затухают.

2. Заслуживает внимания, что двойной расходящийся ряд (4.102) был сведен с помощью некоторых преобразований к одномерному ряду, который сходится как геометрическая прогрессия. Построенные решения дают представление функции Грина, которое может быть эффективно вычислено без каких-либо проблем.

3. Формула (4.108) как представление суммы расходящегося ряда (4.102) достойна специального обсуждения. Мы можем протести-

ровать полученные результаты, например, техникой граничных интегральных уравнений. Для того чтобы вычислить волновое поле без особенностей внутри замкнутого пространства, можно убрать точечный источник, что приведет к ненулевым граничным условиям:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial n} = kH_1^{(1)}(kr)\frac{\partial r}{\partial n}, \quad (4.119)$$

$$r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}, \quad (x, y) \in l.$$

Тогда интеграл Кирхгофа–Гельмгольца определяет волновое поле в произвольной точке (x_1, y_1) внутри граничного контура l в следующем виде:

$$p(x_1, y_1) = H_0^{(1)}(kr_0) + \frac{ki}{4} \int_l \left[H_0^{(1)}(kr_1) H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} + u(x, y) H_1^{(1)}(kr_1) \frac{\partial r_1}{\partial n} \right] dl_{xy}, \quad (4.120)$$

$$r_0 = [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]^{1/2}, \quad r_1 = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{1/2}.$$

Здесь неизвестно граничное значение регулярной волновой функции $u(x, y) = p(x, y) - H_0^{(1)}(kr)$, $(x, y) \in l$. Данная функция может быть определена из интегрального уравнения, определяемого той же формулой Кирхгофа:

$$\frac{u(x_1, y_1)}{2} - \frac{ki}{4} \int_l u(x, y) H_1^{(1)}(kr_1) \frac{\partial r_1}{\partial n} dl_{xy} = \frac{ki}{4} \int_l H_0(kr_1) H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} dl_{xy}, \quad (x_1, y_1) \in l. \quad (4.121)$$

Вспомним, что если использовать ГИУ в данной форме, то мы должны установить сетку узлов таким образом, чтобы ни один узел не совпал с каким-либо углом граничного контура l . Построенный алгоритм для данного регулярного уравнения Фредгольма второго рода коротко описан в разделе 1.5.

Пример сравнения точного решения согласно (4.108), (4.109) и прямым численным решением в случае равностороннего треугольника отражен ниже в табл. 4.1, в которой N — количество узлов на граничном контуре. Заметим, что точная формула (4.108) предопределяет мнимость волновой функции. Результаты численного решения ГИУ показывают ненулевую, но очень малую в сравнении с мнимой вещественную часть. Полученные результаты относятся к случаю, когда $k = 2$, $c = 1$, $x_0 = 0,25$, $y_0 = 0,25/\sqrt{3}$, $y = 0,4$.

Результаты, представленные в этом разделе, тесно связаны с работой автора [122].

4. Можно проверить напрямую, что точные формулы (4.115), (4.118) для частных геометрий, изученные в разделе, обосновывают

Таблица 4.1

x	(4.108), (4.109)	ГИУ ($N = 300$)	ГИУ ($N = 600$)
-0,25	3,19 i	-0,0374 + 3,15 i	-0,0222 + 3,17 i
-0,20	3,16 i	-0,0378 + 3,12 i	-0,0225 + 3,14 i
-0,15	3,10 i	-0,0380 + 3,06 i	-0,0226 + 3,08 i
-0,10	3,02 i	-0,0381 + 2,97 i	-0,0227 + 2,99 i
-0,05	2,92 i	-0,0381 + 2,85 i	-0,0227 + 2,88 i
0,00	2,78 i	-0,0379 + 2,71 i	-0,0227 + 2,73 i
0,05	2,63 i	-0,0376 + 2,55 i	-0,0225 + 2,57 i
0,10	2,44 i	-0,0371 + 2,37 i	-0,0222 + 2,39 i
0,15	2,24 i	-0,0365 + 2,18 i	-0,0219 + 2,20 i
0,20	2,03 i	-0,0357 + 1,99 i	-0,0214 + 2,01 i
0,25	1,82 i	-0,0347 + 1,80 i	-0,0209 + 1,82 i

не только асимптотические оценки (4.94), равномерно справедливые для всех областей, но также гипотезу Вейля (4.87). Доказательство аналогично примененному в разделе 4.4, для прямоугольных областей (это также детально описано в [101]).

4.6. Явные результаты для некоторых многогранников

Метод, предложенный в предыдущей главе, может быть обобщен на трехмерные задачи для некоторых многогранников. Здесь мы также рассматриваем только задачу Неймана.

В классе многогранных граничных поверхностей S единственная известная геометрическая форма, дающая точное решение в явном виде, — это прямоугольный параллелепипед. Решение хорошо известно и может быть построено при помощи разделения переменных, которое снова приводит к модовому представлению. Так как последнее не допускает обобщения на более сложные геометрии, мы развиваем здесь альтернативный подход.

Если точечный источник расположен в произвольной внутренней точке $(x_0, y_0, z_0) \in V$: $p_0 = e^{ikr}/r$, $r = [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{1/2}$, то, чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям для нормальной производной, можно организовать трехмерный периодический массив мнимых источников (зеркальных образов), которые обеспечат естественную симметрию относительно произвольной граничной точки. Тогда отклик в точке приема $(x_1, y_1, z_1) \in V$ определяется трехмерным рядом

$$p(x_1, y_1, z_1) = \sum_{j=1}^8 S(|\xi_j - x_1|, |\eta_j - y_1|, |\zeta_j - z_1|, a, b, c), \quad (4.122)$$

где $a \times b \times c$ — размер параллелепипеда ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$),

$$\begin{aligned}
(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) &= (x_0, y_0, z_0); & (\xi_5, \eta_5, \zeta_5) &= (2a - x_0, 2b - y_0, z_0); \\
(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) &= (2a - x_0, y_0, z_0); & (\xi_6, \eta_6, \zeta_6) &= (2a - x_0, y_0, 2c - z_0); \\
(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) &= (x_0, 2b - y_0, z_0); & (\xi_7, \eta_7, \zeta_7) &= (x_0, 2b - y_0, 2c - z_0); \\
(\xi_4, \eta_4, \zeta_4) &= (x_0, y_0, 2c - z_0); & (\xi_8, \eta_8, \zeta_8) &= (2a - x_0, 2b - y_0, 2c - z_0)
\end{aligned} \quad (4.123)$$

и функция S

$$S(x, y, z, a, b, c) = \sum_{m,n,l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{(x+2am)^2 + (y+2bn)^2 + (z+2cl)^2}}}{\sqrt{(x+2am)^2 + (y+2bn)^2 + (z+2cl)^2}} \quad (4.124)$$

определена рядом, который в классическом смысле не сходится. Следовательно, ряд (4.124) является абсолютно непригодным для численного анализа.

4.6.1. Быстро сходящееся представление для функции S .

Ряд (4.124) может быть регуляризован методом суммирования Пуассона–Абеля (см. раздел 1.3). С этой целью опять применим принцип предельного поглощения. Если к волновому числу добавлена малая мнимая компонента: $k_\varepsilon = k + i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, то ряд (4.124) становится экспоненциально сходящимся и имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как функция $S(x, y, z, a, b, c)$ периодична по всем своим аргументам, предположим, что $0 \leq x < 2a$, $0 \leq y < 2b$, $0 \leq z < 2c$. Далее применим интегральное представление Вейля:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\alpha)z} \frac{e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}}{\gamma(\alpha)} d\alpha_1 d\alpha_2, \\
\alpha &= (\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_\varepsilon^2}.
\end{aligned} \quad (4.125)$$

Таким образом, ряд (4.124) может быть переписан как

$$\begin{aligned}
S(x, y, z, a, b, c) &= \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\gamma(\alpha)(2cl+z)} + \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\gamma(\alpha)(2cl-z)} \right] \times \\
&\quad \times \frac{e^{-i(\alpha_1|2am+x| + \alpha_2|2bn+y|)}}{\gamma(\alpha)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (4.126)
\end{aligned}$$

Ветвящаяся функция $\gamma(\alpha)$ (см. раздел 1.1) имеет положительную вещественную часть $\text{Re}[\gamma(\alpha)] > 0$ при $\varepsilon > 0$. Следовательно, оба ряда в (4.126) являются геометрическими прогрессиями, откуда

$$\begin{aligned}
S(x, y, z, a, b, c) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma(\alpha)} + e^{\gamma(\alpha)(z-2c)}}{1 - e^{-2c\gamma(\alpha)}} \times \\
&\quad \times \frac{e^{-i(\alpha_1|2am+x|+\alpha_2|2bn+y|)}}{\gamma(\alpha)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{ch}[(c-z)\gamma(\alpha)]}{\text{sh}[c\gamma(\alpha)]} \frac{e^{-i(\alpha_1|2am+x|+\alpha_2|2bn+y|)}}{\gamma(\alpha)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (4.127)
\end{aligned}$$

Зафиксируем значение переменной α_1 . Тогда подынтегральное выражение в (4.127) — мероморфная функция от α_2 , экспоненциально затухающая на бесконечности. Следовательно, с помощью леммы Жордана можно применить стандартное разложение по вычетам в простых полюсах, перемещая контур интегрирования вниз на бесконечность. Простые полюсы являются решениями трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned}
\text{sh}[c\gamma(\alpha_1, \alpha_2)] &= 0 \sim \gamma_l = \frac{\pi l i}{c} \sim \alpha_{2l} = -iq(\alpha_1, l), \\
q(\alpha_1, l) &= \sqrt{\alpha_1^2 + \left(\frac{\pi l}{c}\right)^2 - k_\varepsilon^2}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (4.128)
\end{aligned}$$

Следовательно, интегрирование по α_2 в (4.127) приводит к следующему представлению:

$$\begin{aligned}
S(x, y, z, a, b, c) &= \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_l \cos(\pi l z/c)}{c q(\alpha_1, l)} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_1|2am+x|} e^{-q(\alpha_1, l)|2bn+y|}, \\
&\quad \delta_0 = 1/2, \quad \delta_l = 1 \quad (l \geq 1). \quad (4.129)
\end{aligned}$$

Так как вещественная часть квадратного корня функции $q(\alpha_1, l)$ в уравнении (4.129) положительна при $\varepsilon > 0$, то последний ряд (по n) снова является геометрической прогрессией с суммой, равной

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} e^{-q(\alpha_1, l)(2bn+y)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q(\alpha_1, l)(2bn-y)} &= \\
&= \frac{\text{ch}[(b-y)q(\alpha_1, l)]}{\text{sh}[bq(\alpha_1, l)]} = \frac{\text{ch}[(b-y)\sqrt{\alpha_1^2 + (\pi l/c)^2 - k_\varepsilon^2}]}{\text{sh}[b\sqrt{\alpha_1^2 + (\pi l/c)^2 - k_\varepsilon^2}]}. \quad (4.130)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
S(x, y, z, a, b, c) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_l}{c} \cos(\pi l z/c) \times \\
&\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{ch}[(b-y)\sqrt{\alpha_1^2 + (\pi l/c)^2 - k_\varepsilon^2}] e^{-i\alpha_1|2am+x|}}{\sqrt{\alpha_1^2 + (\pi l/c)^2 - k_\varepsilon^2} \text{sh}[b\sqrt{\alpha_1^2 + (\pi l/c)^2 - k_\varepsilon^2}]} d\alpha_1. \quad (4.131)
\end{aligned}$$

Последнее подынтегральное слагаемое представляет собой мероморфную функцию переменной α_1 , которая удовлетворяет необходимым условиям леммы Жордана. Следовательно, удаляя контур интегрирования вниз на бесконечность, можно переписать интеграл в (4.131) как разложение по вычетам в простых полюсах. Последние даются следующим выражением:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \left[b \sqrt{\alpha_1^2 + (\pi l/c)^2 - k_\varepsilon^2} \right] &= 0 \sim \sqrt{\alpha_1^2 + (\pi l/c)^2 - k_\varepsilon^2} = \frac{\pi n i}{b} \sim \\ &\sim \alpha_1 = -i q_{nl}, \quad q_{nl} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi l}{c} \right)^2 - k_\varepsilon^2}, \end{aligned} \quad (4.132)$$

и приходим к представлению в виде тройного ряда

$$\begin{aligned} \frac{S(x, y, z, a, b, c)}{2\pi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n \delta_l \cos(\pi n y/b) \cos(\pi l z/c)}{b c q_{nl}} \times \\ &\times e^{-q_{nl} |2am+x|}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Так как $\operatorname{Re}(q_{nl}) > 0$ при $\varepsilon > 0$, последний ряд с параметром m является геометрической прогрессией:

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-q_{n,l}(2am+x)} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-q_{n,l}(2am-x)} = \frac{\operatorname{ch}[(a-x)q_{n,l}]}{\operatorname{sh}(a q_{n,l})}. \quad (4.134)$$

Следовательно, окончательное представление ($\varepsilon \rightarrow +0$) может быть получено из (4.133) и (4.134) в виде

$$\begin{aligned} S(x, y, z, a, b, c) &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_n \delta_l \cos(\pi n y/b) \cos(\pi l z/c)}{b c \sqrt{(\pi n/b)^2 + (\pi l/c)^2 - k^2}} \times \\ &\times \frac{\operatorname{ch} \left[(a-x) \sqrt{(\pi n/b)^2 + (\pi l/c)^2 - k^2} \right]}{\operatorname{sh} \left[a \sqrt{(\pi n/b)^2 + (\pi l/c)^2 - k^2} \right]}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Заметим, что при произвольном фиксированном значении волнового параметра k члены ряда (4.135) убывают экспоненциально, когда n или/и l стремятся к бесконечности (вспомним, что $0 < x < 2a \sim -a < a-x < a$). Таким образом, уравнение (4.135) — и в самом деле эффективное, быстро сходящееся представление функции S .

Необходимо также отметить, что, хотя исходная формула (4.134) симметрична по координатам x, y, z , представление (4.135) имеет асимметричную форму. Эта формула допускает стандартную циклическую замену $(x, a) \rightarrow (y, b) \rightarrow (z, c) \rightarrow (x, a)$, причем новые выражения при произвольной перестановке такого типа будут эквивалентны представлению (4.135).

4.6.2. Точное решение для треугольной призмы. Очевидно, в случае параллелепипеда представление (4.135) может быть напрямую получено посредством разделения переменных. Однако применение модового разложения такого типа пригодно только для этого вида многогранников. Поэтому в предыдущем разделе мы применили другой подход, а именно метод мнимых источников, который дает прямое разложение для более сложного многогранника, если известно расположение всех мнимых источников.

Соответствующее точное решение можно построить для многогранника, у которого каждому внутреннему двугранному углу соответствует конечный набор мнимых источников, расположенных вне многогранника. В таком случае решение в явном виде получается в форме конечной суперпозиции (сравните с разложением по модам для параллелепипеда) функции S с определенными значениями ξ_j, η_j, ζ_j и a, b, c . Известно, что это справедливо только для клиньев с углом раствора π/n , где n — произвольное натуральное число. Случай $n = 2$ для всех двугранных углов относится к указанному выше решению для параллелепипеда.

Основной результат раздела заключается в том, что можно построить точное решение в явном виде для многогранной области, где каждый двугранный угол многогранника равен π/n . Мы не ставим своей целью дать полное описание и подходящих решений для всех подобных многогранников. Вместо этого представим некоторые точные результаты для трех прямых треугольных призм.

Если основание призмы — треугольник, лежащий в горизонтальной плоскости (см. предыдущий раздел), то соответствующий набор мнимых источников хорошо известен для 1) равнобедренных прямоугольных треугольников, 2) равносторонних треугольников и 3) прямоугольного треугольника с острыми углами 30 и 60° . Полный трехмерный набор мнимых источников для каждого случая получается как определенное периодическое продолжение (определенные отражения) соответствующей горизонтальной системы вдоль вертикальной оси z .

Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты вещественного точечного источника и (x_1, y_1, z_1) — точка наблюдения. Тогда имеем три случая для трех прямоугольных призм.

1. Координаты углов данной призмы следующие $(0, 0, 0)$; $(a, 0, 0)$; $(0, a, 0)$; $(0, 0, h)$; $(a, 0, h)$; $(0, a, h)$ (a — сторона основания). Точное решение имеет вид

$$p(x_1, y_1, z_1) = \sum_{j=1}^{16} S(|\xi_j - x_1|, |\eta_j - y_1|, |\zeta_j - z_1|, a, b, h), \quad b = a, \quad (4.136)$$

где

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, \zeta)_1 &= (x_0, y_0, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_9 &= (x_0, y_0, 2h - z_0); \\ (\xi, \eta, \zeta)_2 &= (a - y_0, a - x_0, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_{10} &= (a - y_0, a - x_0, 2h - z_0); \\ (\xi, \eta, \zeta)_3 &= (a + y_0, a - x_0, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_{11} &= (a + y_0, a - x_0, 2h - z_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\xi, \eta, \zeta)_4 &= (2a - x_0, y_0, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_{12} &= (2a - x_0, y_0, 2h - z_0); \\
(\xi, \eta, \zeta)_5 &= (2a - x_0, -y_0, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_{13} &= (2a - x_0, -y_0, 2h - z_0); \\
(\xi, \eta, \zeta)_6 &= (a + y_0, x_0 - a, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_{14} &= (a + y_0, x_0 - a, 2h - z_0); \\
(\xi, \eta, \zeta)_7 &= (a - y_0, x_0 - a, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_{15} &= (a - y_0, x_0 - a, 2h - z_0); \\
(\xi, \eta, \zeta)_8 &= (x_0, -y_0, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_{16} &= (x_0, -y_0, 2h - z_0)
\end{aligned}$$

и функция S в (4.136) определяется уравнением (4.135).

2. Если сторона равностороннего основания равна c , то углы этой призмы — точки $(-\frac{1}{2}c, 0, 0)$; $(\frac{1}{2}c, 0, 0)$; $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}c, 0)$; $(-\frac{1}{2}c, 0, h)$; $(\frac{1}{2}c, 0, h)$; $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}c, h)$. Точное решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
p(x_1, y_1, z_1) &= \sum_{j=1}^{24} S(|\xi_j - x_1|, |\eta_j - y_1|, |\zeta_j - z_1|, a, b, h), \\
a &= \frac{3}{2}c, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{3}c,
\end{aligned} \tag{4.137}$$

где

$$\begin{aligned}
(\xi, \eta, \zeta)_1 &= (x_0, y_0, z_0); & (\xi, \eta, \zeta)_6 &= (\xi, -\eta, \zeta)_1; \\
(\xi, \eta, \zeta)_2 &= \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}\sqrt{3}y_0, \frac{1}{4}\sqrt{3}c - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_0 + \frac{1}{2}y_0, z_0\right); \\
(\xi, \eta, \zeta)_3 &= \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}\sqrt{3}y_0, \frac{1}{4}\sqrt{3}c - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_0 - \frac{1}{2}y_0, z_0\right); \\
(\xi, \eta, \zeta)_4 &= (\xi, -\eta, \zeta)_3; & (\xi, \eta, \zeta)_5 &= (\xi, -\eta, \zeta)_2; \\
(\xi, \eta, \zeta)_{j+6} &= \left(\xi_j + \frac{3}{2}c, \eta_j + \frac{1}{2}\sqrt{3}c, \zeta_j\right), \quad j = 1, \dots, 6; \\
(\xi, \eta, \zeta)_{j+12} &= (\xi_j, \eta_j, 2h - \zeta_j), \quad j = 1, \dots, 12.
\end{aligned} \tag{4.138}$$

3. Если гипотенуза основания равна c , то прямоугольные координаты углов призмы $(0, 0, 0)$; $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}c, 0)$; $(0, \frac{1}{2}c, 0)$; $(0, 0, h)$; $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}c, h)$; $(0, \frac{1}{2}c, h)$. Явная форма решения

$$\begin{aligned}
p(x_1, y_1, z_1) &= \sum_{j=1}^{48} S(|\xi_j - x_1|, |\eta_j - y_1|, |\zeta_j - z_1|, a, b, h), \\
a &= \frac{1}{2}\sqrt{3}c, \quad b = \frac{3}{2}c,
\end{aligned} \tag{4.139}$$

где

$$\begin{aligned}
(\xi, \eta, \zeta)_1 &= (x_0, y_0, z_0); \\
(\xi, \eta, \zeta)_2 &= \left(\frac{1}{4}\sqrt{3}c + \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}\sqrt{3}y_0, \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_0 - \frac{1}{2}y_0, z_0\right); \\
(\xi, \eta, \zeta)_3 &= \left(\frac{1}{4}\sqrt{3}c + \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}\sqrt{3}y_0, \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_0 + \frac{1}{2}y_0, z_0\right); \\
(\xi, \eta, \zeta)_4 &= \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}c - \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}\sqrt{3}y_0, \eta_3, z_0\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\xi, \eta, \zeta)_5 &= \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}c - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}\sqrt{3}y_0, \eta_2, z_0 \right); \\
(\xi, \eta, \zeta)_6 &= \left(\sqrt{3}c - x_0, y_0, z_0 \right); \\
(\xi, \eta, \zeta)_j &= (\xi, -\eta, \zeta)_{13-j}, \quad j = 7, \dots, 12; \\
(\xi, \eta, \zeta)_{j+12} &= \left(\xi_j + \frac{1}{2}\sqrt{3}c, \eta_j + \frac{3}{2}c, \zeta_j \right), \quad j = 1, \dots, 12; \\
(\xi, \eta, \zeta)_{j+24} &= (\xi_j, \eta_j, 2h - \zeta_j), \quad j = 1, \dots, 24.
\end{aligned} \tag{4.140}$$

Следует заметить, что если любое значение (ξ_j, η_j, ζ_j) в вышеприведенных выражениях оказывается вне естественной области $(0 \leq \xi_j \leq 2a, 0 \leq \eta_j \leq 2b, 0 \leq \zeta_j \leq 2h)$, то прежде применения формулы (4.135) необходимо использовать периодичность функции S .

4.6.3. Явные формулы для собственных частот. Собственные значения волнового числа k (совпадающие с резонансными частотами) могут быть получены из (4.135) приравниванием знаменателя к нулю. Очевидно, это выполняется при нулевых значениях гиперболического синуса

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} \left[a \sqrt{\left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi l}{c} \right)^2 - k^2} \right] &= 0 \sim \\
&\sim a \sqrt{\left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi l}{c} \right)^2 - k^2} = \pi m i \sim k_{mnl} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}}
\end{aligned} \tag{4.141}$$

с произвольными целыми числами m, n, l . Для области в виде параллелепипеда со сторонами a, b, c этот результат хорошо известен в литературе. Для треугольных призм это приводит к новым точным выражениям.

1. Прямоугольная призма с основанием в форме равнобедренного прямоугольного треугольника (сторона основания a , высота призмы h). Собственные значения частотного параметра здесь:

$$k_{mnl} = \pi \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{a^2} + \frac{l^2}{h^2}}, \quad m \geq n. \tag{4.142}$$

2. Прямоугольная призма с основанием в форме равностороннего треугольника (сторона основания равна c , высота призмы равна h). Следуя соотношениям (4.141), получаем $k_{mnl} = \pi \sqrt{4(m^2 + 3n^2)/(9c^2) + l^2/h^2}$.

Докажем, что данное выражение справедливо, если сумма $(m+n)$ четная (ср. с разделом 4.5). Начнем с очевидного замечания, что формулы (4.137), (4.138) показывают: для каждой точки $(\xi, \eta, \zeta)_j$, $j = 1, \dots, 24$, в сумме (4.137) присутствует также точка $(\xi, \eta, \zeta)_{j \pm 6}$, где $\xi_{j \pm 6} = \xi_j \pm a$, $\eta_{j \pm 6} = \eta_j \pm b$, $\zeta_{j \pm 6} = \zeta_j$. Теперь если взять $\sqrt{(\pi n/b)^2 + (\pi l/c)^2 - k^2} = \pi m i/a$, как в (4.142), то следующая часть числителя в формуле (4.135) станет равной $\cos(\pi n y/b) \times$

$\times \operatorname{ch} [(a-x)\sqrt{(\pi n/b)^2 + (\pi l/c)^2 - k^2}] = \cos(\pi n y/b) \cos[\pi m(a-x)/a] -$ слагаемое, которое имеет знак, обратный относительно $(\xi, \eta, \zeta)_j$ и $(\xi, \eta, \zeta)_{j \pm 6}$, если $(m+n)$ нечетно. Следовательно, эти слагаемые в сумме (4.137) взаимно уничтожают друг друга всякий раз, когда $(m+n)$ нечетно, не допуская такой комбинации n и m из набора собственных значений параметра k . Доказательство завершено.

Далее таким же образом, как в предыдущем разделе, можно доказать, что использование полученной формулы для k_{mnl} с четным $(m+n)$ эквивалентно выражению

$$k_{mnl} = \pi \sqrt{\frac{16(m^2 + mn + n^2)}{9c^2} + \frac{l^2}{h^2}}, \quad (4.143)$$

если использовать произвольные положительные целые m, n, l .

3. Прямоугольная призма с прямоугольным треугольником в основании (острые углы 30 и 60° , гипотенуза c), высота призмы h . Формула (4.141) приводит к собственным значениям волнового числа $k_{mnl} = \pi \sqrt{4(3m^2 + n^2)/(9c^2) + l^2/h^2}$. При этом рассуждения, аналогичные случаю 2, доказывают что истинный результат имеет вид $(m, n, l$ — произвольные целые числа)

$$k_{mnl} = \pi \sqrt{\frac{16(m^2 + mn + n^2)}{9c^2} + \frac{l^2}{h^2}}, \quad (4.144)$$

т. е. то же, что для предыдущей призмы (4.143).

Представленные результаты изложены в работах [121, 122].

Примечания

1. Полученные аналитические результаты заслуживают специального теста на сравнение с численными расчетами. Для вычисления волнового поля в произвольной точке наблюдения в нерезонансном случае можно применить, например, конечно-элементную или гранично-элементную технику. Тем не менее более точные результаты получаются численно для собственных частот, так как они являются интегральными характеристиками геометрии многогранника. С этой целью мы воспользовались методом конечных элементов. Полученные результаты показали, что относительная погрешность аналитического и прямого численного расчетов не выше 1% для всех рассмотренных геометрий. Расчеты проводились для первых 20 собственных значений.

2. Теория Вейля–Карлемана (см. раздел 4.4) может быть также применена в трехмерном случае к объему произвольной формы. Можно доказать, что главный асимптотический член для задач Дирихле и Неймана выражается в виде [30]

$$N(\lambda) = \frac{V}{6\pi^2} \lambda^{3/2} + O(\lambda \ln \lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.145)$$

где V — мера объема.

Глава 5

ДИФРАКЦИЯ НА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПРЕПЯТСТВИЯХ

5.1. Дифракция на экране и на щели в экране

Как и в волновых задачах для акустического слоя (глава 3), задачи, рассматриваемые в главе 5, демонстрируют мощь преобразования Фурье.

Пусть плоская акустическая волна падает снизу, распространяясь в направлении вертикальной оси y в прямоугольной системе координат (x, y) : $p^{\text{inc}}(x, y) = e^{iky}$. Таким образом, задача рассматривается как двумерная. Здесь мы изучим интегральные уравнения, возникающие при дифракции на акустически твердом линейном препятствии, расположенном на оси x , т. е. при $y = 0$. Если препятствие занимает всю ось x : $y = 0$, $-\infty < x < \infty$, то задача одномерная и сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Если это препятствие конечной длины, то будем рассматривать одновременно две родственные задачи:

а) имеется твердый экран, расположенный на $|x| \leq a$, $y = 0$;

б) имеется разрыв (щель) в бесконечном твердом экране, занимающий интервал $|x| \leq a$, $y = 0$. В книге [89] можно найти общие результаты, которые устанавливают взаимоотношение между этими двумя задачами.

Для обеих задач рассмотрим отдельно нижнюю ($y \leq 0$, здесь все функции помечены индексом 1) и верхнюю ($y \geq 0$, индекс 2) полуплоскости с соответствующими (комплексными) акустическими давлениями $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$, каждое из которых удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p_{1,2} + k^2 p_{1,2} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.1)$$

Здесь нормальное падение плоской волны рассматривается лишь для простоты. Другие формы падающей волны меняют только правую часть интегральных уравнений.

Если применить преобразование Фурье по переменной $-\infty < x < \infty$, то легко видеть, что решение, дифракционная компонента которого удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда, определяется в виде (сравните с главой 3)

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & P_2(s, y) = A(s)e^{-\gamma(s)y} + P^{\text{inc}}(s, y), \quad y \geq 0, \\ & P_1(s, y) = B(s)e^{\gamma(s)y} + P^{\text{inc}}(s, y), \quad y \leq 0, \quad \gamma(s) = \sqrt{\alpha^2 - s^2}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad P_2(s, y) &= C(s)e^{-\gamma(s)y}, \quad y \geq 0, \\ P_1(s, y) &= D(s)e^{\gamma(s)y} + P^{\text{inc}}(s, y), \quad y \leq 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $P^{\text{inc}}(s, y) = 2\pi\delta(s)e^{iky}$. Коэффициенты $A(s)$ и $B(s)$ должны быть определены из граничных условий на прямой $y = 0$, которые ставятся в соответствии с непроницаемостью твердого экрана (нормальная компонента скорости равна нулю). Так как $\mathbf{v} = (1/i\omega\rho_0)\text{grad } p$, то в рассматриваемых задачах при $y = 0$

$$\alpha) \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0, \quad |x| \leq a, \quad p_1 = p_2, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial y}, \quad |x| > a; \quad (5.4)$$

$$\beta) \quad p_1 = p_2, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial y}, \quad |x| \leq a, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0, \quad |x| > a. \quad (5.5)$$

Далее сведем обе задачи α и β к интегральному уравнению на интервале $|x| \leq a$. С этой целью введем новые неизвестные функции $g_\alpha(x)$ и $g_\beta(x)$, определенные только на данном интервале:

$$\alpha) \quad y = 0: \quad p_1 - p_2 = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ g_\alpha(x), & |x| \leq a; \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\beta) \quad y = 0: \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial y} = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ g_\beta(x), & |x| \leq a. \end{cases} \quad (5.7)$$

Граничные условия в уравнениях (5.4), (5.5) записаны таким образом, что в обеих задачах α и β имеем $\partial p_1/\partial y = \partial p_2/\partial y$, $y = 0$, $|x| < \infty$, что с помощью уравнений (5.1), (5.2) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & -\gamma A = \gamma B; \\ \beta) \quad & -\gamma C = \gamma D + 2\pi ik\delta(s). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Окончательно уравнения (5.6), (5.7) в преобразованиях Фурье дают

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & B - A = G_\alpha(s) \\ \beta) \quad & -\gamma C = G_\beta(s), \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$G_{\alpha,\beta} = \int_{-a}^a g_{\alpha,\beta}(\xi) e^{is\xi} d\xi. \quad (5.10)$$

Уравнения (5.8)–(5.10) позволяют выписать коэффициенты A , B и C , D через G_α , G_β :

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & B = \frac{G_\alpha(s)}{2}, \quad A = -\frac{G_\alpha(s)}{2}; \\ \beta) \quad & C = -\frac{G_\beta(s)}{\gamma(s)}, \quad D = \frac{G_\beta(s)}{\gamma(s)} - 2\pi \frac{ik}{\gamma(s)} \delta(s). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Следовательно, применяя теоремы о свертке (см. раздел 1.1), приходим к следующему представлению при $|x| < \infty$:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad p_1(x, y) &= p^{\text{inc}}(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(s) e^{\gamma y} e^{-isx} ds = \\ &= e^{iky} + \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a g_{\alpha}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma y} e^{-is(x-\xi)} ds, \quad y \leq 0, \quad (5.12) \\ p_2(x, y) &= e^{iky} - \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a g_{\alpha}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma y} e^{-is(x-\xi)} ds, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad p_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(s) e^{-\gamma(s)y} e^{-isx} ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a g_{\beta}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma(s)y}}{\gamma(s)} e^{-is(x-\xi)} ds, \quad y \geq 0, \\ p_1(x, y) &= p^{\text{inc}}(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(s) e^{\gamma(s)y} e^{-isx} ds = \quad (5.13) \\ &= e^{iky} + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a g_{\beta}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\gamma y}}{\gamma(s)} e^{-is(x-\xi)} ds - \\ &\quad - ik \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\gamma y}}{\gamma(s)} \delta(s) e^{-isx} ds = \\ &= e^{iky} + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a g_{\beta}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\gamma y}}{\gamma(s)} e^{-is(x-\xi)} ds + e^{-iky}, \quad y \leq 0. \end{aligned}$$

В последних преобразованиях мы воспользовались основным свойством дельта-функции Дирака (см. раздел 1.4), а также значением $\gamma(0) = -ik$.

Необходимые интегральные уравнения получаются из (5.12), (5.13), если привлечь оставшиеся граничные условия, которые пока не были использованы:

$$\alpha) \quad \left. \frac{\partial p_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad |x| \leq a, \quad \sim \int_{-a}^a g_{\alpha}(\xi) K_{\alpha}(x-\xi) d\xi = -2ik, \quad (5.14)$$

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_\alpha(s) e^{isx} ds, \quad L_\alpha(s) = \gamma(s);$$

$$\beta) p_1 = p_2, \quad y = 0, \quad |x| \leq a, \quad \sim \int_{-a}^a g_\beta(\xi) K_\beta(x - \xi) d\xi = -1, \quad (5.15)$$

$$K_\beta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_\beta(s) e^{isx} ds, \quad L_\beta(s) = \frac{1}{\gamma(s)}.$$

Свойства интегральных уравнений. Поскольку $L_\alpha(s)$ неограниченно для больших s , интеграл (5.14) для ядра K_α должен трактоваться в обобщенном смысле, как значение расходящегося интеграла. Его можно вычислить, следуя идеям раздела 1.3:

$$\begin{aligned} K_\alpha(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty s \cos(sx) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\sqrt{s^2 - k^2} - s) \cos(sx) ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} s \cos(sx) ds - \frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(sx) ds}{\sqrt{s^2 - k^2} + s} = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon^2 - x^2}{(\varepsilon^2 + x^2)^2} - \frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(kxs) ds}{\sqrt{s^2 - 1} + s} = \\ &= -\frac{1}{\pi x^2} - \frac{k^2 I_c(kx)}{\pi}, \quad I_c(kx) = \int_0^\infty \frac{\cos(kxs) ds}{\sqrt{s^2 - 1} + s}. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (5.16) ограничено для конечных x и k , так как данный интеграл сходится в классическом смысле при $k, x > 0$. Для $kx \rightarrow 0$ его асимптотическое поведение может быть оценено из формулы (1.83): $I_c(kx) \sim O(\ln(k|x|))$, $kx \rightarrow 0$. Следовательно, ядро задачи α является суммой характеристического гиперсингулярного ядра и ядра с логарифмической особенностью (слабой).

Ядро $K_\beta(x)$ можно оценить похожим образом, тем не менее удобнее работать с явным представлением

$$K_\beta(x) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|x|), \quad (5.17)$$

которое является ядром со слабой логарифмической особенностью (сравните с асимптотическим поведением функции Ханкеля для малых аргументов, формула (2.69)):

$$K_\beta(x) \sim -\frac{1}{\pi} [\ln(k|x|) + \gamma - \ln 2] + \frac{i}{2} + O(x^2 \ln |x|), \quad x \rightarrow 0. \quad (5.18)$$

Теорема 1. *Интегральное уравнение (5.14) разрешимо единственным образом в классе ограниченных функций по крайней мере для достаточно малого k .*

Доказательство. Выделим согласно (5.16) характеристическую гиперсингулярную часть ядра

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g_\alpha(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} = -2ik + \frac{k^2}{\pi} \int_{-a}^a g_\alpha(\xi) I_c(k|x-\xi|) d\xi, \quad |x| \leq a, \quad (5.19)$$

и применим формулу обращения (1.190) для оператора в левой части:

$$g_\alpha(x) = 2ik \left[\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\xi d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (x - \xi)} + \int_{-a}^a K_c(x, \xi) g_\alpha(\xi) d\xi \right],$$

$$K_c(x, \xi) = O(k \ln k), \quad k \rightarrow 0, \quad (5.20)$$

где оценка ядра K_c равномерна по $(x, \xi) \in (-a, a)$. Здесь первый интеграл может быть вычислен следующим образом:

$$\int_{-a}^a \frac{\xi d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (x - \xi)} = \int_{-a}^a \frac{(\xi - x) + x}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (x - \xi)} d\xi = -\pi, \quad (5.21)$$

так как

$$\int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (x - \xi)} = 0$$

(главное значение по Коши). Таким образом, мы пришли к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, где вследствие замечания после теоремы 1 в разделе 1.5 оно разрешимо единственным образом. *Теорема доказана.*

Заметим, что вопрос разрешимости для возникающего уравнения (5.14) — проблема довольно абстрактная. Более важный практический вопрос относится к единственности при условии, что на бесконечности поставлены корректные условия. Если решение данной линейной задачи построено правильно, то оно должно быть единственным.

Заметим, что ограниченное решение стремится к нулю вблизи границ интервала $(-a, a)$ как $\sqrt{a \pm x}$, $x \rightarrow \mp a$.

Теорема 2. *Для всех $0 < k < \infty$, решение уравнения (5.14) единственно в классе дифференцируемых функций: $g_\alpha(x) \in C_1(-a, a)$, $g_\alpha(x) \sim \sqrt{a \pm x}$, $x \rightarrow \mp a$.*

Доказательство. Данное утверждение может быть доказано методом раздела 1.6, приспособленного к случаю, когда символическая функция $L(s)$ неположительна (в нашей задаче она комплекснозначна). Если существуют два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ класса, описанного в условиях теоремы, то для рассматриваемого операторного уравнения

$G_\alpha g_\alpha = f_\alpha$ имеем $G_\alpha(u_1 - u_2) = 0$. Скалярное произведение этого уравнения на функцию $(u_1 - u_2)$ дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_\alpha(s) |U_1(s) - U_2(s)|^2 ds = 0, \quad L_\alpha(s) = \sqrt{s^2 - k^2}. \quad (5.22)$$

Ясно, что при условиях данной теоремы $U_1(s)$, $U_2(s) \sim |s|^{-3/2}$, $s \rightarrow \infty$, непрерывны для конечного s и интеграл (5.22) конечен. Разделение вещественной и мнимой частей в соотношении (5.22) приводит к выражению

$$\left(\int_{-\infty}^{-k} + \int_k^{\infty} \right) \sqrt{s^2 - k^2} |U_1(s) - U_2(s)|^2 ds - \\ - i \int_{-k}^k \sqrt{k^2 - s^2} |U_1(s) - U_2(s)|^2 ds = 0. \quad (5.23)$$

Вещественная и мнимая части в (5.23) должны быть равны нулю, что возможно, только если $U_1(s) \equiv U_2(s)$, $|s| < \infty \sim u_1(x) \equiv u_2(x)$, $|x| \leq a$. Это и доказывает теорему.

Уравнение (5.15) может быть изучено применением точно такой же техники.

Теорема 3. 1. *Интегральное уравнение (5.15) разрешимо единственным образом в классе непрерывных функций с особенностью в виде квадратного корня на концах интервалов по крайней мере для достаточно малого k .*

2. *Решение интегрального уравнения (5.15) единственно в рассматриваемом классе для всех k .*

Доказательство. Обращение интегрального оператора с характеристическим логарифмическим ядром (см. раздел 1.7) сводит уравнение (5.15) к уравнению Фредгольма второго рода. После этого процедура доказательства первого утверждения теоремы совпадает с процедурой в предыдущей теореме. Второе утверждение также доказывается по аналогии с теоремой 2. В самом деле, вместо (5.22) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_\beta(s) |U_1(s) - U_2(s)|^2 ds = 0, \quad L_\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 - k^2}}. \quad (5.24)$$

Для функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ из рассматриваемого класса разделение вещественной и мнимой частей в (5.24)

$$\left(\int_{-\infty}^{-k} + \int_k^{\infty} \right) \frac{|U_1(s) - U_2(s)|^2}{\sqrt{s^2 - k^2}} ds + i \int_{-k}^k \frac{|U_1(s) - U_2(s)|^2}{\sqrt{k^2 - s^2}} ds = 0 \quad (5.25)$$

приводит к некоторым конечнозначным интегралам. Если $u_1, u_2 \in C_1(-a, a)$ с поведением $(a \pm x)^{-1/2}$, $x \rightarrow \mp a$, то асимптотика функций U_1, U_2 имеет вид $U_1(s), U_2(s) \sim s^{-1/2}$, $s \rightarrow \infty$; следовательно, первые два интеграла сходятся на бесконечности, что и завершает доказательство.

Примечание. В приложениях теория, рассмотренная в этом разделе, позволяет вычислить диаграмму рассеяния в дальней зоне. На низких частотах ее можно выразить в явном виде (сравните с результатами главы 2). Ради краткости приведем здесь лишь набросок подобной процедуры.

Ясно, что для малых частот ($k \rightarrow 0$) ядра (5.16), (5.18) интегральных операторов (5.14), (5.15) сводятся к их характеристическим частям, которые являются соответственно характеристическим гиперсингулярным ядром и характеристическим логарифмическим ядром. Оба ядра допускают явное аналитическое обращение. Как следует из (5.20), в первой задаче имеем $g_\alpha(x) = -2ik\sqrt{a^2 - x^2}$. Аналогичное низкочастотное решение во второй задаче как решение характеристического логарифмического уравнения имеет вид $g_\beta(x) = B/\sqrt{a^2 - x^2}$ с некоторой константой B . Далее эти функции можно подставить в формулы (5.12), (5.13) и получить волновое поле во всем пространстве. Отсюда может быть извлечена асимптотика в дальней зоне, если мы оценим интегралы

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|y|} e^{-is(x-\xi)} ds, \quad I_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma|y|}}{\gamma(s)} e^{-is(x-\xi)} ds \quad (5.26)$$

для больших $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Оценка проводится методом стационарной фазы (см. формулы (1.88), (1.92)):

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} e^{-\gamma(s)|y|} ds \sim \sqrt{\frac{2\pi k}{R}} \cos \alpha e^{i(kR - \pi/4)} F(k \sin \alpha),$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (5.27)$$

следовательно,

$$I_\alpha \sim \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} e^{i(kr - \pi/4)} \cos \alpha, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (5.28)$$

$$I_\beta \sim \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} e^{i(kr - \pi/4)} \frac{\cos \alpha}{\gamma(-k \sin \alpha)} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{i(kr + \pi/4)},$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (5.29)$$

Дальнейшее рассмотрение основано на классической аппроксимации в дальней зоне для величины r в аргументах показательных функций в (5.28), (5.29) (сравните с главой 2):

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x\xi + \xi^2} &= R \sqrt{1 - \frac{2x\xi - \xi^2}{R^2}} \approx R \left[1 - \frac{x\xi}{R^2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right] = \\ &= R - \xi \cos \alpha + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.2. Дифракция на трещине в неограниченной упругой среде

Здесь мы изучим интегральный оператор, возникающий при дифракции на трещине в упругой среде. Опять для определенности рассмотрим двумерный случай нормального падения плоской продольной волны.

Пусть трещина длины $2a$ расположена на интервале $|x| \leq a$, $y = 0$, и плоская продольная волна падает на эту трещину из $y = -\infty$: $\varphi^{\text{inc}}(x, y) = e^{ik_p y}$, $\psi^{\text{inc}}(x, y) = 0$. Основные соотношения для этой задачи могут быть найдены в разделе 1.9, а применение преобразования Фурье по переменной $-\infty < x < \infty$ описано в разделе 3.3.

Снова рассмотрим отдельно две полуплоскости $y \leq 0$ (нижний индекс 1) и $y \geq 0$ (индекс 2). В обеих полуплоскостях полное волновое поле является суммой падающего и отраженного полей:

$$\varphi = \varphi^{\text{inc}} + \varphi^{\text{sc}}, \quad \psi = \psi^{\text{sc}} \quad (\psi^{\text{inc}} = 0). \quad (5.31)$$

В терминах образов Фурье решение, удовлетворяющее корректным условиям излучения на бесконечности, которые в рассматриваемом случае неограниченного пространства могут быть применены просто как условия излучения Зоммерфельда, имеет следующую форму (сравните с разделом 3.3):

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2}(s, y) &= A_{1,2}(s) e^{-\gamma(s)|y|}, \quad \gamma(s) = \sqrt{s^2 - k_p^2}, \\ \Psi_{1,2}(s, y) &= B_{1,2}(s) e^{-q(s)|y|}, \quad q(s) = \sqrt{s^2 - k_s^2}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

где оба потенциала Ламе взяты для компонент рассеянного упругого волнового поля.

Коэффициенты $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ будут найдены из граничных условий на прямой $y = 0$, которые в случае свободных от нагрузки лицевых поверхностей трещины выписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \sigma_{xy}^{(1,2)} &= -\sigma_{xy}^{\text{inc}}, \quad \sigma_{yy}^{(1,2)} = -\sigma_{yy}^{\text{inc}}, \quad |x| \leq a, \\ \sigma_{xy}^{(1)} &= \sigma_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \quad u_x^{(1)} = u_x^{(2)}, \quad u_y^{(1)} = u_y^{(2)}, \quad |x| > a, \end{aligned} \quad (5.33)$$

где нижние соотношения подразумевают непрерывность напряжений и смещений.

Как обычно, заметим, что условия (5.33) влекут за собой $\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}$, $\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}$ по всей прямой $y = 0$, $|x| < \infty$, так что

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}, \\ 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right) + k_s^2 \varphi_1 &= 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right) + k_s^2 \varphi_2, \end{aligned} \quad (5.34)$$

или

$$\begin{aligned} -2is\Phi'_1 + \Psi''_1 + s^2\Psi_1 &= -2is\Phi'_2 + \Psi''_2 + s^2\Psi_2, \\ 2(-s^2\Phi_1 - is\Psi'_1) + k_s^2\Phi_1 &= 2(-s^2\Phi_2 - is\Psi'_2) + k_s^2\Phi_2 \quad (y = 0), \end{aligned} \quad (5.35)$$

где производные берутся по y . Уравнения (5.34) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} -2is\gamma A_1 + (2s^2 - k_s^2)B_1 &= 2is\gamma A_2 + (2s^2 - k_s^2)B_2, \\ -(2s^2 - k_s^2)A_1 - 2isqB_1 &= -(2s^2 - k_s^2)A_2 + 2isqB_2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Для того чтобы свести задачу к интегральному уравнению, введем новые неизвестные функции при $y = 0$:

$$u_x^{(1)} - u_x^{(2)} = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ g_x(x), & |x| \leq a, \end{cases} \quad u_y^{(1)} - u_y^{(2)} = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ g_y(x), & |x| \leq a. \end{cases} \quad (5.37)$$

Тогда в переменных Фурье

$$\begin{aligned} (-is\Phi_1 + \Psi'_1) - (-is\Phi_2 + \Psi'_2) &= G_x, \quad G_x(s) = \int_{-a}^a g_x(\xi) e^{is\xi} d\xi, \\ (\Phi'_1 + is\Psi_1) - (-\Phi'_2 + is\Psi_2) &= G_y, \quad G_y(s) = \int_{-a}^a g_y(\xi) e^{is\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (5.38)$$

что эквивалентно соотношениям

$$-isA_1 + qB_1 + isA_2 + qB_2 = G_x, \quad \gamma A_1 + isB_1 + \gamma A_2 - isB_2 = G_y. \quad (5.39)$$

Теперь решение системы уравнений (5.35), (5.38) позволяет выразить четыре коэффициента A_1 , B_1 , A_2 , B_2 через функции G_x , G_y :

$$\begin{aligned} A_1 = -A_2 &= -\frac{2s^2 - k_s^2}{2\gamma k_s^2} G_y + \frac{is}{k_s^2} G_x, \\ B_1 = B_2 &= -\frac{is}{k_s^2} G_y - \frac{2s^2 - k_s^2}{2qk_s^2} G_x. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Тогда образы Фурье нормального и касательного напряжений на поверхностях трещины

$$\tilde{\sigma}_{yy}^{(1)}(s, 0) = \frac{\Delta(s)}{2\gamma k_s^2} G_y, \quad \tilde{\sigma}_{xy}^{(1)}(s, 0) = -\frac{\Delta(s)}{2qk_s^2} G_x, \quad (5.41)$$

где

$$\Delta(s) = (2s^2 - k_s^2)^2 - 4s^2\gamma q. \quad (5.42)$$

Это хорошо известная функция Рэлея.

Обращение соотношения (5.41) с помощью последних оставшихся граничных условий, записанных в первой строке формулы (5.33), приводит нас к следующим интегральным уравнениям для функций $g_x(x)$ и $g_y(x)$:

$$\int_{-a}^a g_y(\xi) K_y(x - \xi) d\xi = -\frac{2\sigma_{yy}^{\text{inc}}(x, 0)k_s^2}{\rho c_s^2} \quad (|x| \leq a), \quad (5.43)$$

$$K_y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_y(s) e^{-isx} ds, \quad L_y(s) = \frac{\Delta(s)}{\gamma(s)},$$

$$\int_{-a}^a g_x(\xi) K_x(x - \xi) d\xi = \frac{2\sigma_{xy}^{\text{inc}}(x, 0)k_s^2}{\rho c_s^2} \quad (|x| \leq a), \quad (5.44)$$

$$K_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_x(s) e^{-isx} ds, \quad L_x(s) = \frac{\Delta(s)}{q(s)}.$$

Поскольку $\sigma_{yy}^{\text{inc}}(x, 0) = (k_s^2 - 2k_p^2)$, $\sigma_{xy}^{\text{inc}}(x, 0) = 0$, то функция g_x тождественно равна нулю: $g_x(x) \equiv 0$, $|x| \leq a$. Таким образом, единственной ненулевой функцией является функция зазора между гранями трещины в вертикальном направлении $g_y(x) = (u_y^{(1)} - u_y^{(2)})(x, 0)$, $|x| \leq a$. После замены переменных $s = \tilde{s}k_s$ получим, опуская тильды:

$$\int_{-a}^a g_y(\xi) K_y(x - \xi) d\xi = -\frac{2(1 - 2\beta^2)}{\mu}, \quad |x| \leq a \quad \left(\beta = \frac{k_p}{k_s} < 1\right), \quad (5.45)$$

$$K_y(x) = \frac{k_s^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_y(s) e^{-isk_s x} ds,$$

$$L_y = \frac{\Delta(s)}{\gamma(s)} = \frac{(2s^2 - 1)^2 - 4s^2 \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{s^2 - \beta^2}}{\sqrt{s^2 - \beta^2}},$$

где учтено, что $c_s^2 = \mu/\rho$ (см. раздел 1.9).

Свойства интегрального уравнения. Прежде всего заметим, что символическая функция $L_x(s)$ интегрируема по любому конечному интервалу на прямой $|s| < \infty$. Поэтому интеграл, определяющий ядро

$K_y(x)$ в уравнении (5.43), расходится только на бесконечности и может трактоваться в обобщенном смысле. Заметим, что при больших s

$$L_y(s) = \frac{\Delta(s)}{\gamma(s)} = \frac{2(\beta^2 - 1)s^2[1 + O(1/s^2)]}{s[1 + O(1/s^2)]} = 2(\beta^2 - 1)s + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad (5.46)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} K_y(x) &= \frac{2k_s^2}{\pi}(\beta^2 - 1) \int_0^\infty s \cos(sk_s x) ds + \\ &+ \frac{k_s^2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\Delta(s)}{\gamma(s)} - 2(\beta^2 - 1)s \right] \cos(sk_s x) ds = \\ &= -\frac{2(\beta^2 - 1)}{\pi x^2} + \frac{k_s^2}{\pi} I_y(k_s x), \quad (5.47) \\ I_y(k_s x) &= \int_0^\infty \left[\frac{\Delta(s)}{\gamma(s)} - 2(\beta^2 - 1)s \right] \cos(sk_s x) ds. \end{aligned}$$

Так как выражение в квадратных скобках в (5.47) порядка $O(1/s)$, $s \rightarrow \infty$, то асимптотическая оценка, основанная на (1.83), приводит к оценке $I_y(k_s x) \sim O[(k_s |x|)^{-2}]$, $k_s x \rightarrow 0$. Следовательно, мы опять пришли к гиперсингулярному интегральному уравнению.

Точно так же, как в предыдущем разделе, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Интегральное уравнение (5.45) разрешимо единственным образом в классе ограниченных функций по крайней мере для достаточно малых частот.*

Доказательство опять-таки основано на эквивалентном представлении (5.47) и обращении характеристической гиперсингулярной части ядра и на том факте, что регулярная (точнее слабосингулярная) часть ядра равномерно мала при $k_s \rightarrow 0$.

Заметим, что решение уравнения (5.45), если оно существует, должно быть четным для четной правой части.

Теорема 2. *Решение уравнения (5.45) в классе четных ограниченных функций с поведением $\sqrt{a \pm x}$ при $x \rightarrow +a$ единственно для всех $k > 0$.*

Доказательство. Как обычно, если присутствуют два отличных друг от друга решения $u_1(x)$, $u_2(x)$ указанного класса, то $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением однородного уравнения (5.43) и представляет собой другую форму (5.45). Если скалярно умножить обе части

уравнения (5.43) на ту же функцию $u(x)$, то придем к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_y(s) |U(s)|^2 ds = 0. \quad (5.48)$$

Здесь левая часть интеграла конечна, так как поведение подынтегрального выражения на бесконечности $\sim s(s^{-3/2})^2 = O(1/s^2)$.

Следующие шаги доказательства основаны на классических свойствах функции Рэлея $\Delta(s)$ (см., например [59]). Обычно уравнение Рэлея

$$\Delta(s) = 0 \sim (2s^2 - k_s^2) - 4s^2\gamma q = 0 \quad (5.49)$$

имеет один вещественный корень s_0 такой, что $s_0 > k_s > k_p$. Далее функция $L_y(s) = \Delta(s)/\gamma(s)$ в (5.45), представленная в (5.48), комплексная: $L_y(s) = \alpha + i\beta$, при этом

$$\begin{aligned} s > s_0: \quad \alpha < 0, \quad \beta = 0; \quad k_s < s < s_0: \quad \alpha > 0, \quad \beta = 0; \\ k_p < s < k_s: \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0; \quad 0 < s < k_p: \quad \alpha = 0, \quad \beta > 0, \end{aligned} \quad (5.50)$$

так что разделение вещественной и мнимой частей в (5.48) не приводит к $U(s) \equiv 0$ вследствие отрицательного знака символической функции для $s > s_0$.

Для того чтобы обеспечить положительную определенность образа Фурье ядра для $s > s_0$, сохраняя положительные знаки для его вещественной и мнимой частей на всех остальных отрезках, применим идею, предложенную в книге [15]. Ниже применим этот подход для нашего случая гиперсингулярных уравнений.

Представим уравнение (5.43) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a g_y(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (s_0^2 - s^2) L_y(s) \frac{1}{s_0^2 - s^2} e^{-is(x-\xi)} ds = f, \\ |x| \leq a, \quad f = -\frac{2(k_s^2 - 2k_p^2)}{\mu} k_s^2, \end{aligned} \quad (5.51)$$

то есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (s_0^2 - s^2) L_y(s) e^{-is(x-\xi)} ds = f, \quad |x| \leq a, \\ v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a g_y(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is(x-\xi)}}{s_0^2 - s^2} ds, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где последний интеграл трактуется как сингулярный интеграл типа Коши, который может быть вычислен как сумма вкладов простых полюсов $s = \pm s_0$.

Таким образом, замечаем, что

$$V(s) = \frac{G_y(s)}{s_0^2 - s^2} \quad (5.53)$$

и, следовательно, $v(x)$ четна для всех $|x| < \infty$, если $G_y(s)$ также четна (последняя четна, так как четна $g_y(x)$). Тогда

$$v(x) = -\frac{i}{2} \int_{-a}^a g_y(\xi) \left[\frac{e^{is_0|x-\xi|}}{2s_0} + \frac{e^{-is_0|x-\xi|}}{-2s_0} \right] d\xi = \frac{1}{2} \int_{-a}^a g_y(\xi) \sin(s_0|x-\xi|) d\xi. \quad (5.54)$$

Теперь заметим, что для $|x| > a$

$$\begin{aligned} v(x) &= \pm \frac{1}{2} \int_{-a}^a g_y(\xi) \sin[s_0(x-\xi)] d\xi = \\ &= \pm \frac{1}{2} \left[\sin(s_0x) \int_{-a}^a g_y(\xi) \cos(s_0\xi) d\xi + \cos(s_0x) \int_{-a}^a g_y(\xi) \sin(s_0\xi) d\xi \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.55)$$

так как здесь второй интеграл равен нулю вследствие четности $g_y(x)$, а первый должен быть нулевым из-за четности $v(x) \forall x \in (-\infty, \infty)$. Это доказывает, что (5.52) является стандартным интегральным уравнением (не фредгольмовского типа), когда интервал изменения как для переменной ξ , так и для внешней переменной x — один и тот же.

После этих вспомогательных преобразований доказательство завершается обычным сведением к соотношению типа (5.48), которое теперь принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} (s_0^2 - s^2) L_y(s) |U(s)|^2 ds = 0, \quad (5.56)$$

где символическая функция $(s_0^2 - s^2) L_y(s)$ имеет положительные вещественную и мнимую части на всей оси $|s| < \infty$. Тогда разделение вещественной и мнимой частей окончательно доказывает теорему.

Примечание. Как и в случае скалярной задачи дифракции на линейном рассеивателе, разработанный подход позволяет получить диаграмму рассеяния в дальней зоне для низких частот в случае линейной трещины конечной длины. Вкратце вычислительная схема имеет следующий вид. К примеру, для продольных отраженных волн имеем

$$\varphi_{1,2}(x, y) = \mp \frac{1}{2\pi k_s^2} \int_{-a}^a g_y(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2s^2 - k_s^2}{2\gamma} e^{-\gamma|y|} e^{-is(x-\xi)} ds \sim$$

$$\sim \mp \frac{1}{4\pi k_s^2} \sqrt{\frac{2\pi}{k_p R}} e^{i(kR + \pi/4)} (2k_p^2 \cos^2 \alpha - k_s^2) \int_{-a}^a g_y(\xi) e^{-ik_p \xi \cos \alpha} d\xi \quad (5.57)$$

и задача сводится к вычислению возникающего интеграла, что было подробно рассмотрено выше.

Диаграмма рассеяния поперечной волны может быть построена аналогично.

5.3. Высокочастотная асимптотика в неограниченной среде

Интегральные уравнения (5.14), (5.15), возникающие в задаче дифракции на линейных препятствиях, такие как уравнения Фредгольма первого рода со слабой особенностью в ядре и гиперсингулярные уравнения, допускают применение прямых численных методов (см. главу 9) для низких и средних частот. Для сверхвысоких частот, когда длина волны $\lambda = 2\pi/k$ становится слишком малой, применение любого численного метода требует очень большого количества узлов, так как для устойчивых вычислений и правдоподобных результатов необходимо как минимум 10 узлов на длину волны. Именно поэтому высокочастотный (т.е. коротковолновый) режим требует специального аналитического асимптотического подхода. В нашем исследовании мы следуем идеям, предложенным Койтером [99] и Александровым [2].

Перепишем уравнения (5.14), (5.15) в эквивалентном виде (с заменой переменных $s = \tilde{x}k$, $x = \tilde{x}/k$, $\xi = \xi/k$; далее тильды опущены):

$$\int_{-ak}^{ak} g(\xi) K(x - \xi) d\xi = f, \quad |x| \leq ak \quad (f = \text{const}), \quad (5.58)$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s) e^{isx} ds,$$

$$L(s) = \begin{cases} \alpha) & L(s) = \gamma(s) = \sqrt{s^2 - 1}, \\ \beta) & L(s) = 1/\gamma(s) = 1/\sqrt{s^2 - 1}, \end{cases} \quad \begin{matrix} f = -2i, \\ f = -k. \end{matrix}$$

Представим уравнение (5.58) в форме, для которой ключевой особенностью является представление интеграла по интервалу конечной длины в виде комбинации нескольких интегралов, каждый из которых берется по некоторому полубесконечному интервалу. Для того чтобы

вывести это представление, рассмотрим три тождества

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{\infty} v(ak + \xi) K(x - \xi) d\xi &= f + \int_{-\infty}^{-ak} [v(ak - \xi) - w] K(x - \xi) d\xi, \\ &\quad -ak \leq x < \infty, \\ \int_{-\infty}^a v(ak - \xi) K(x - \xi) d\xi &= f + \int_{ak}^{\infty} [v(ak + \xi) - w] K(x - \xi) d\xi, \\ &\quad -\infty < x \leq ak, \\ \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) K(x - \xi) d\xi &= f, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (5.59)$$

каждое из которых выполняется помимо прочих также и на основном интервале $|x| \leq ak$.

Заметим, что решение последнего уравнения может быть построено простым применением преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} W(s)L(s) &= 2\pi f\delta(s) \sim W(s) = 2\pi f \frac{\delta(s)}{L(s)} \sim \\ &\sim w(x) = \frac{f}{L(0)} \equiv \text{const} = \begin{cases} \alpha & 2, \\ \beta & ik, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.60)$$

поэтому в уравнениях (5.59) можно было бы использовать функцию $w(x)$ в виде константы w .

Теперь возьмем сумму первых двух уравнений (5.59) и вычтем из нее третье уравнение (5.59). После сокращения некоторых интегралов можно увидеть, что

$$g(x) = v(ak + x) + v(ak - x) - w \quad (5.61)$$

удовлетворяет исходному уравнению (5.58). Заметим, что функция w (постоянная) уже найдена в (5.60), так что единственная оставшаяся неизвестная функция, которую нужно найти, — это $v(x)$. Последняя удовлетворяет уравнению (5.59), которое можно переписать в виде

$$\int_0^{\infty} v(\xi) K(x - \xi) d\xi = f + \int_0^{\infty} [v(2ak + \xi) - w] K(x + \xi) d\xi, \quad 0 < x < \infty. \quad (5.62)$$

Здесь правая часть интеграла представляет некий «хвост», и мы докажем, что он асимптотически мал при $k \rightarrow \infty$ и таким образом уравнение (5.62) становится уравнением Винера–Хопфа. Это позволяет выписать решение в явном виде (см. раздел 1.2).

Один из возможных методов доказательства состоит в принятии этого утверждения в качестве гипотезы для построения полного решения на ее основе, а далее гипотезу можно проверить с использованием построенного решения.

Если отбросить «хвост» в виде последнего интеграла в (5.62), то решение уравнения Винера–Хопфа

$$\int_0^{\infty} v(\xi) K(x - \xi) d\xi = f, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (5.63)$$

можно построить методом, описанным в разделе 1.2, следующим образом ($p = -is$):

$$\begin{aligned} \alpha. \quad V_+(s) \sqrt{s^2 - 1} &= \left(\frac{f}{-is} \right)_+ + F_-(s) \sim \\ &\sim V_+(s)(\sqrt{s+1})_+(\sqrt{s-1})_- = \left(\frac{f}{-is} \right)_+ + F_-(s) \sim \\ &\sim V_+(s)(\sqrt{s+1})_+ = \left(\frac{f}{-is} \right)_+ + \left(\frac{1}{\sqrt{s-1}} \right)_- + \frac{F_-(s)}{(\sqrt{s-1})_-} \sim \\ &\sim V_+(s)(\sqrt{s+1})_+ = \left(\frac{1}{-i} \frac{f}{-is} \right)_+ + N_-(s) \sim \\ &\sim V_+(s)(\sqrt{s+1})_+ - \left(\frac{1}{-i} \frac{f}{-is} \right)_+ = N_-(s) \equiv 0 \sim \\ &\sim V_+(s) = \frac{1}{-i} \frac{f}{(-is)\sqrt{s+1}} = \frac{1}{-i} \frac{f}{p\sqrt{1+ip}} = e^{\pi i/4} \frac{f}{p\sqrt{p-i}}, \quad (5.64) \end{aligned}$$

где мы перешли от переменной преобразования Фурье s к переменной преобразования Лапласа p , для того чтобы воспользоваться преимуществами таблиц обратных преобразований Лапласа [66]:

$$v(x) = e^{\pi i/4} \frac{f}{\sqrt{-i}} \operatorname{Erf}(\sqrt{-ix}) = e^{\pi i/4} f \sqrt{2} [C(x) + iS(x)]. \quad (5.65)$$

Здесь $\operatorname{Erf}(x)$ — интеграл вероятности (функция ошибок) и $C(x), S(x)$ — интегралы Френеля [65]. Теперь, построив решение уравнения (5.63) в явной форме, можно доказать, что правая часть интеграла в (5.62) асимптотически мала. В самом деле, так как

$$C(x), S(x) = \frac{1}{2} + O(x^{-1/2}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.66)$$

видно, что при $x \rightarrow +\infty$

$$v(x) = if + O(x^{-1/2}) = 2 + O(x^{-1/2}) = w + O(x^{-1/2}), \quad (5.67)$$

так как выражение в квадратных скобках в (5.62)

$$v(2ak + \xi) - w = O((ak)^{-1/2}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.68)$$

Если ядро $K(x)$ обладает интегрируемым поведением на бесконечности, то оценка (5.68) имеет место для полной правой части инте-

грала (5.62). Имеем

$$\begin{aligned}\pi K(x) &= \int_0^{\infty} \sqrt{s^2 - 1} \cos(sx) ds = \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty} \right) \sqrt{s^2 - 1} \cos(sx) ds = \\ &= \int_0^1 \sqrt{s(2-s)} \cos[(1-s)x] ds + \int_0^{\infty} \sqrt{s(2+s)} \cos[(1+s)x] ds. \quad (5.69)\end{aligned}$$

Теперь лемма Эрдейи (см. раздел 1.4) показывает, что $K(x) \sim x^{-3/2}$, $x \rightarrow +\infty$, если здесь положить $\alpha = 1$, $\beta = 3/2$ (здесь это величины из леммы Эрдейи, в отличие от обозначений задач, рассматриваемых в этой главе) и выразить косинусы в уравнении (5.69) через экспоненциальные функции мнимых аргументов с помощью формулы Эйлера.

β . По аналогии с задачей α здесь можно определить, что

$$V_+(s) = \frac{-if\sqrt{s+1}}{-is} = \frac{-if\sqrt{1+ip}}{p} = e^{-\pi i/4} f \frac{\sqrt{p-i}}{p}, \quad p = -is, \quad (5.70)$$

поэтому [66]

$$\begin{aligned}v(x) &= e^{-\pi i/4} f \left[\frac{e^{ix}}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{-i} \operatorname{Erf}(\sqrt{-ix}) \right] = \\ &= e^{-\pi i/4} f \left\{ \frac{e^{ix}}{\sqrt{\pi x}} - \sqrt{2} i [C(x) + iS(x)] \right\}. \quad (5.71)\end{aligned}$$

Теперь имеется явное представление для $v(x)$, и оценить правую часть интеграла можно на основе ее асимптотического поведения на бесконечности

$$\begin{aligned}v(x) &\sim -if - \frac{e^{ix}}{\sqrt{\pi} x^{3/2}} + O(x^{-3/2}) = ik - \frac{e^{ix}}{\sqrt{\pi} x^{3/2}} + O(x^{-3/2}) = \\ &= w - \frac{e^{ix}}{\sqrt{\pi} x^{3/2}} + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (5.72)\end{aligned}$$

Если добавить к этой оценке также асимптотику ядра

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{\sqrt{s^2 - 1}} ds = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(|x|) \sim \frac{e^{i(x+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.73)$$

то станет ясно, что рассматриваемый «хвост» асимптотически мал:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} [v(2ak + \xi) - w] K(x + \xi) d\xi \sim \\ &\sim - \frac{e^{i(2ak+x-\pi/4)}}{\sqrt{\pi} (2ak)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{2i\xi}}{\sqrt{x+\xi}} d\xi = O[(ak)^{-3/2}], \quad ak \rightarrow \infty. \quad (5.74)\end{aligned}$$

Примечания

1. Структура выведенного решения такова, что в нем присутствует вырожденное решение w , которое асимптотически представляет фактическое решение на всем интервале $|x| \leq ak$, за исключением пограничных слоев рядом с концами интервала $x \sim \pm ak$, где на структуру решения влияют острые концы. Эта идея достаточно ясна, так как, если $|x \pm ak| = O(1)$, то $v(ak \pm x) \rightarrow w$, $k \rightarrow \infty$, и, таким образом, в (5.61) имеем $g(x) \rightarrow w$, $k \rightarrow \infty$. Следовательно, можно заключить, что вырожденное решение, полученное из интегрального уравнения на бесконечной оси $|x| < \infty$, справедливо на рассматриваемом интервале. Его необходимо уточнить только в малой окрестности краев, и корректная структура решения в этих малых пограничных слоях может быть определена решением соответствующего уравнения Винера–Хопфа.

2. По эвристическим соображениям, вырожденное решение, справедливое вне малых пограничных слоев, для высоких частот должно быть согласовано с физической теорией дифракции Кирхгофа. Можно убедиться, что эти эвристические соображения верны. В самом деле, в задаче α) давление в «зоне света», согласно теории Кирхгофа, $p(x, -0) = p_1(x) = 2p^{\text{inc}} = 2$, $|x| \leq a$, а решение в «зоне тени» $p(x, +0) = p_2(x) = 0$. Тогда $g_2(x) = p_1(x) - p_2(x) = 2$, что согласуется с полученным решением $w = 2$. В задаче β) физическая теория дифракции может интерпретироваться таким образом, что в случае, когда ширина отверстия намного превышает длину волны, структура решения на отверстии такая же, как и в падающей волне, т.е. концы экрана изменяют ее весьма слабо. Следовательно, в этой задаче $g_\beta(x) = (\partial p_1 / \partial x)(x, 0) = (\partial p_2 / \partial x)(x, 0) = (\partial p^{\text{inc}} / \partial x)(x, 0) = ik$, что совпадает с вырожденным решением $w = ik$.

3. В литературе стандартный подход уточнения простой идеи физической (и геометрической — см. ниже раздел 6.3) теории дифракции называется *методом краевых волн* [89, 96]. Он основывается на некоторых нестрогих физических наблюдениях и также сводится к уравнению Винера–Хопфа. Описанный здесь прямой математический метод имеет ясное математическое обоснование.

4. Из результатов раздела 5.1 можно прийти к выводу, что в задаче α) поведение решения вблизи концов интервала: $\sim (ak \pm x)^{1/2}$ ($x \rightarrow \mp ak$). Интересно проверить, сохраняется ли это качественное свойство в построенном решении. Как следует из уравнения (5.61) с функцией (5.65), если $x \rightarrow ak$, то $g(x) \rightarrow v(2ak) - w + v(ak - x) = O[(ak - x)^{1/2}]$, поскольку $\text{Erf}(ax) = O(x)$, $x \rightarrow 0$. Аналогично из формулы (5.71) видно, что в задаче β) решение обладает требуемой особенностью квадратного корня возле краев экрана.

5. В работе [117] развивается современный метод решения задачи коротковолновой дифракции на прямолинейном препятствии, в котором используется построенная здесь асимптотика.

5.4. Прямолинейный вибратор в бесконечном волноводе

Здесь рассмотрим задачу, родственную изученной в предыдущем разделе. Для определенности рассмотрим акустический волновод (т.е. слой постоянной толщины) с акустически мягкими гранями (рис. 5.1). Пусть плоская твердая плита конечной длины совершает вибрации внутри слоя. Тогда ее лицевые поверхности $y = \pm 0$, $|x| < l$ осциллируют с амплитудой p_0 , которая для определенности постоянна по длине плиты: $p_0 = \text{const}$. Как обычно, изучаем гармонический во времени процесс, где волновое давление $p(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

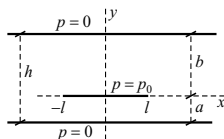


Рис. 5.1. Осциллирующая линейная плита в бесконечном закрытом волноводе

Применяя преобразование Фурье по оси x к волновому уравнению (Гельмгольца), приходим к следующему представлению для функции $P(\alpha, y)$, которая выбрана таким образом, что граничные условия $p(x, b) = p(x, -a) = 0$ на свободных поверхностях границы автоматически удовлетворяются:

$$P(s, y) = \begin{cases} A(s) \operatorname{sh}[\gamma(y + a)], & -a < y < 0, \\ B(s) \operatorname{sh}[\gamma(y - b)], & 0 < y < b, \end{cases} \quad (5.75)$$

где $A(s)$ и $B(s)$ — неизвестные функции, определяемые из граничных условий, и $\gamma = \sqrt{s^2 - k^2}$.

Очевидно, волновое поле непрерывно при $|x| > l$ вдоль прямой $y = 0$. С другой стороны, граничные условия $p = p_0$, $y = \pm 0$, $|x| \leq l$ подразумевают также его непрерывность на отрезке $|x| \leq l$. Таким образом, имеем $p(x, -0) = p(x, +0)$, $|x| < \infty$, следовательно,

$$A(s) \operatorname{sh}(a\gamma) = -B(s) \operatorname{sh}(b\gamma) \sim B(s) = -A(s) \frac{\operatorname{sh}(a\gamma)}{\operatorname{sh}(b\gamma)}. \quad (5.76)$$

Введем новую неизвестную функцию $u(x)$, $|x| \leq l$, такую, что

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=-0} - \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=+0} = \begin{cases} 0, & |x| > l, \\ u(x), & |x| \leq l. \end{cases} \quad (5.77)$$

Тогда функция $A(s)$ может быть выражена через $u(x)$:

$$A(s) = \frac{\text{sh}(b\gamma)}{\text{sh}(h\gamma)} \int_{-l}^l u(\xi) e^{is\xi} d\xi, \quad h = a + b. \quad (5.78)$$

Наконец, граничные условия $p = p_0$, $|x| \leq l$, с помощью соотношений (5.75)–(5.78), приводят к следующему интегральному уравнению для функции $u(x)$:

$$\int_{-l}^l u(\xi) K(x - \xi) d\xi = p_0, \quad (|x| \leq l), \quad (5.79)$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(s) e^{-isx} ds, \quad G(s) = \frac{\text{sh}(a\gamma) \text{sh}(b\gamma)}{\gamma \text{sh}(h\gamma)}.$$

Символическая функция $G(s)$, задаваемая уравнением (5.79), хороша известна в теории ветвящихся электромагнитных волноводов. Тем не менее не существует математической теории, подходящей для уравнения (5.79) на высоких частотах.

Для краткости в дальнейших рассуждениях ограничимся без потери общности частным случаем $a = b$, т.е. случаем вибрирующей пластинки, расположенной посередине, параллельно граням волновода. Перепишем уравнение (5.79) в безразмерной форме ($h = 2a = 2b$)

$$\int_{-d}^d v(\xi) K(x - \xi) d\xi = 1, \quad |x| \leq d, \quad (5.80)$$

$$\chi = ka, \quad d = l/a, \quad v(x) = \frac{u(x)}{2p_0},$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} G(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad G(\alpha) = \frac{\text{th} \gamma}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \chi^2}.$$

Коротковолновый режим подразумевает, что параметр d фиксирован, а параметр частоты $\chi \gg 1$.

Функция $G(s)$ в уравнении (5.80) — мероморфная функция комплексной переменной s (см. раздел 1.1). Существует счетный набор нулей $\pm \alpha_m$

$$\alpha_m = \sqrt{\chi^2 - (\pi m)^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5.81)$$

и счетный набор полюсов $\pm \beta_m$

$$\beta_m = \sqrt{\chi^2 - [\pi(m - 1/2)]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5.82)$$

так что ядро (5.80) может быть явно представлено как ряд по вычетам в простых полюсах (раздел 1.1):

$$K(x) = i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(i\beta_m x)}{\beta_m}. \quad (5.83)$$

Подобное представление позволяет свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений [105].

Для произвольного большого значения частотного параметра χ существует счетный набор вещественных нулей и полюсов. Когда полюс с изменением частоты приближается к началу координат, имеет место резонанс. Если к среде добавить малое затухание, то положительные полюсы сдвигаются вверх, а отрицательные — вниз. Поэтому для идеальной среды, когда данные сингулярные точки расположены на вещественной оси, контур интегрирования σ в (5.80) должен огибать положительные полюсы снизу и отрицательные сверху.

Необходимо заметить, что с ростом частоты (параметр χ стремится к бесконечности) на вещественной оси возникает все больше и больше нулей и полюсов. Эта определяющая особенность усложняет высокочастотный анализ. Пусть

$$\chi = \pi(n + \delta), \quad 0 \leq \delta < 1, \quad \delta \neq 1/2, \quad (5.84)$$

где $n \gg 1$ — большое положительное целое число. Критическое значение $\delta = 1/2$, относящееся к случаю резонанса, должно быть исключено из рассмотрения.

Как и в предыдущих разделах, легко видеть, что основное уравнение (5.80) эквивалентно паре уравнений для новых неизвестных функций $p(x)$ и $w(x)$, которые справедливы соответственно на полу-бесконечном и бесконечном интервалах:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} w_1(\xi) K(x - \xi) d\xi &= 1 + \int_0^{\infty} [w_1(2d + \xi) - w] K(x + \xi) d\xi, \quad x > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) K(x - \xi) d\xi &= 1, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (5.85)$$

если

$$v(x) = w_1(d + x) + w_1(d - x) - w, \quad |x| \leq d. \quad (5.86)$$

Основной результат представлен здесь следующей теоремой.

Теорема 1. Если $\delta \neq 0, 1/2$, 1 и $x > 0$, то правая часть интеграла в уравнении (5.85) асимптотически мала:

$$\int_0^{\infty} [w_1(2d + \xi) - w] K(x + \xi) d\xi \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.87)$$

и, таким образом, для главного члена асимптотики может быть отброшена.

Доказательство. Вновь исходим из асимптотических свойств ядра $K(x)$. Представление (5.83) непригодно для этих целей, и мы воспользуемся другим разложением. Функция $G(s)$ в уравнении (5.80) может быть переписана как

$$G(x) = \frac{1 - \exp(-2\gamma)}{\gamma[1 + \exp(-2\gamma)]} = \frac{1}{\gamma} - \frac{2 \exp(-2\gamma)}{\gamma[1 + \exp(-2\gamma)]} = \\ = \frac{1}{\gamma} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\exp(-2m\gamma)}{\gamma}. \quad (5.88)$$

Принимая во внимание интегральное тождество (см. (1.117))

$$\int_{\sigma} \frac{\exp(-|z|\gamma)}{\gamma} e^{-isx} ds = \pi i H_0^{(1)} \left(\chi \sqrt{z^2 + x^2} \right), \quad (5.89)$$

приходим к следующему выражению для ядра $K(x)$:

$$K(x) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(\chi|x|) - i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} H_0^{(1)} \left(\chi \sqrt{4m^2 + x^2} \right), \quad (5.90)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля.

Очевидно, что при $\chi \rightarrow \infty$ аргумент каждого слагаемого в сумме представления (5.90) растет бесконечно и равномерно по x . Поэтому с помощью асимптотической формулы (сравните с (3.115))

$$H_0^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \pi/4)}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.91)$$

равномерное высокочастотное представление для ядра может быть окончательно получено в следующем виде:

$$K(x) \sim \frac{i}{2} H_0^{(1)}(\chi|x|) - \sqrt{\frac{2}{\pi \chi}} e^{\pi i/4} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\exp(i\chi \sqrt{4m^2 + x^2})}{(4m^2 + x^2)^{1/4}}. \quad (5.92)$$

Для открытого волновода конечной длины присутствует только первое слагаемое бесконечного ряда (5.92). Отметим также, что слагаемое $(i/2) H_0^{(1)}(\chi|x|)$ нельзя упростить асимптотически при $\chi \rightarrow \infty$, потому что аргумент ядра $K(x + \xi)$ в рассматриваемой правой части интеграла (5.17) может быть произвольно малым, когда $\xi \sim x \sim 0$.

Для доказательства теоремы предположим, как обычно, что эти утверждения справедливы. Тогда функция $w_1(x)$ является решением интегрального уравнения Винера–Хопфа (5.85) на полубесконечном

интервале. Опуская некоторые рутинные преобразования, приходим к следующему выражению для его решения:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{G(0)} - \frac{1}{2G_+(0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pi m)^2 G_+(\alpha_m)}{\alpha_m^2} e^{i\alpha_m x} = \\ &= \frac{\chi}{\operatorname{tg} \delta} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_+(\alpha_m)}{G_+(0)} \frac{(\pi m)^2}{\alpha_m^2} e^{i\alpha_m x}, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (5.93)$$

где

$$G(s) = G_+(s) G_-(s), \quad G_-(-s) = G_+(s), \quad (5.94)$$

есть результат факторизации символической функции $G(s)$, задаваемой уравнением (5.80).

Решение уравнения свертки (5.85) можно легко получить, используя преобразования Фурье, в следующем виде:

$$w(x) \equiv w = \frac{1}{G(0)} = \frac{\chi}{\operatorname{tg} \delta}. \quad (5.95)$$

Теперь из (5.93), (5.95) ясно, что значения $\delta = 0$ и $\delta = 1$ (так же как и резонансное значение $\delta = 1/2$) должны быть исключены из рассмотрения, что сказано в формулировке теоремы. Если δ не совпадает с каким-либо из этих критических значений, то $w_1(x)$ и $w(x)$ порядка $O(\chi)$, $\chi \rightarrow \infty$, равномерно по x . Интересно, что несколько первых слагаемых в ряду (5.93) помимо первого имеют один и тот же порядок $O(\chi)$, $\chi \rightarrow \infty$ (для m : $\pi m \sim \chi$). Заметим также, что ряд (5.93) можно суммировать по $1 \leq m \leq n$, так как в асимптотическом смысле величины α_m вещественны только для этих значений m . Все остальные члены экспоненциально малы ($i\alpha_m \sim -\chi^{1/2}$, $m > n$), поскольку аргумент функции $w_1(2d + \xi)$, $\xi > 0$, в уравнении (5.85)₁ больше, чем $2d$ (т. е. $x > 2d$ в (5.93)).

Оценим истинный асимптотический порядок интеграла в правой части (5.85):

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} [w_1(2d + \xi) - w] K(x + \xi) d\xi = \\ &= \frac{i}{2} \int_0^{\infty} [w_1(2d + \xi) - w] H_0^{(1)}[\chi(x + \xi)] d\xi - \\ &- \sqrt{\frac{2}{\pi \chi}} e^{\pi i/4} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \int_0^{\infty} [w_1(2d + \xi) - w] \frac{\exp \left[i\chi \sqrt{4m^2 + (x + \xi)^2} \right]}{[4m^2 + (x + \xi)^2]^{1/4}} d\xi. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Интегралы в правой части (5.96) должны оцениваться разными методами для свободного слагаемого и слагаемых в ряду. Для последних введем фазовую функцию

$$S(x) = \sqrt{4m^2 + (x + \xi)^2}, \quad (5.97)$$

которая определяет сильноосциллирующую природу экспоненциальной функции $\exp[i\chi S(x)]$ в (5.96). Очевидно, что $S'(x) = (x + \xi)/S(x) > 0$ при $x > 0$, $\xi \geq 0$, следовательно, данная функция не обладает стационарной точкой. Таким образом, стандартное многократное интегрирование по частям доказывает, что порядок каждого члена под знаком суммы в уравнении (5.96) меньше, чем $O(\chi^{-\beta})$, где $\beta \gg 1$ — произвольное положительное целое число. Далее оценим свободные слагаемые в правой части уравнения (5.96), если значение x находится вне пограничного слоя (где $x \sim 1/\chi$):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [w_1(2d + \xi) - w] H_0^{(1)}[\chi(x + \xi)] d\xi = \\ = \int_0^{\infty} \frac{w_1(2d + \xi/\chi) - w}{\chi} H_0^{(1)}(\chi x + \xi) d\xi \sim \\ \sim \frac{e^{i\chi x}}{\sqrt{\chi x}} \int_0^{\infty} \frac{w_1(2d + \xi/\chi) - w}{\chi} e^{i\xi} d\xi = O\left(\frac{1}{\sqrt{\chi x}}\right), \end{aligned} \quad (5.98)$$

Это и доказывает теорему.

Рассматриваемая задача кажется типичной асимптотической проблемой с сингулярными возмущениями. Структура решения вне пограничного слоя совершенно отлична от решения внутри пограничного слоя $x = 0$. Таким образом, теорема дает метод построения только *внешнего* решения. В самом деле, подстановка (5.93) и (5.95) в (5.86) приводит к следующему высокочастотному представлению ($|x| < d$):

$$v(x) = \frac{\chi}{\operatorname{tg} \delta} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \frac{G_+(\alpha_m)}{G_+(0)} \frac{(\pi m)^2}{\alpha^2} [e^{i\alpha_m(d+x)} + e^{i\alpha_m(d-x)}]. \quad (5.99)$$

Решение в пограничном слое $d \pm x \sim 1/\chi$ нельзя получить с помощью данного метода. Заметим, что в ряду (5.99) взято конечное число слагаемых $1 \leq m \leq n$, так как все остальные слагаемые экспоненциально малы вне пограничного слоя (где α_m становится мнимым).

Эффективное высокочастотное представление для $G_+(\alpha)$. Основная асимптотическая формула (5.99) содержит значения функции $G_+(s)$ (s вещественна), которые являются результатом факторизации главной символической функции $G(s)$ (5.80). Она может быть переписана в виде произведения трех функций: $G = G_1 G_2^{-1} G_3$, где $G_1 = 1 -$

– $\exp(-2\gamma)$, $G_2 = 1 + \exp(-2\gamma)$, $G_3 = (\gamma)^{-1}$, $\gamma = \sqrt{s^2 - \chi^2}$. Разложение для третьей функции тривиально: $G_3(s) = (s + \chi)^{-1/2}(s - \chi)^{-1/2}$. Для первых двух можно работать с общим представлением (см. раздел 1.2, а также [107])

$$G_{1,2}^+(s) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\ln(1 \mp e^{-2\sqrt{u^2 - \chi^2}})}{u - s} du \right\}, \quad (5.100)$$

которое имеет слишком сложную форму.

Известно [12] хорошее высокочастотное приближение

$$G_1^+ G_3^+(s) \approx 2\sqrt{\frac{\delta}{n}} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2\pi\delta\chi}} \right) \exp \left[-0,824 \frac{1-i}{\sqrt{2\chi}} s \right], \quad (5.101)$$

$$\chi = \pi(n + \delta), \quad 0 < \delta < 1.$$

Оно справедливо при $|\alpha| \ll \chi$ и $0 < \delta \ll 1$, т.е. для высоких частот, близких к собственным. Следовательно, оно не представляет интереса для настоящего исследования, так как предложенный асимптотический подход несправедлив при $\delta \rightarrow 0$, как уже обсуждалось выше.

Мы начнем со следующего приближенного равенства ($s_* = s/\chi$):

$$G_1^+(s) \approx \frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{s + \chi}} \exp \left\{ \frac{s_*}{\pi} \sqrt{\frac{\chi}{2}} \int_0^\infty \frac{\ln \{1 - \exp[2i(\pi\delta + t)]\}}{2t + \chi s_*^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right\}. \quad (5.102)$$

Известно, что оно справедливо при $\chi \gg 1$ и произвольной $\text{Im}(s) \geq 0$ [105]. Применяя разложение логарифмической функции в ряд Тейлора, последний интеграл можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi\delta j i}}{j} \int_0^\infty \frac{e^{2t j i}}{2t + \chi s_*^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ & = \frac{\pi}{s_* \sqrt{2\chi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi\delta j i}}{j} \left\{ \sqrt{2} [S(\chi s_*^2 j) i + C(\chi s_*^2 j)] e^{-i\pi/4} - 1 \right\} e^{-i\chi s_*^2 j}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

где $S(x)$ и $C(s)$ — интегралы Френеля. Для них существуют некоторые рациональные аппроксимации [1], так что интеграл в (5.102) может быть сведен к сумме

$$- \frac{\pi}{s_* \sqrt{\chi}} e^{-\pi i/4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi\delta j i}}{j} \left[i f \left(\alpha_* \sqrt{\frac{2}{\pi}} \chi j \right) + g \left(\alpha_* \sqrt{\frac{2}{\pi}} \chi j \right) \right], \quad (5.104)$$

где

$$f(x) \approx \frac{1 + 1,22x}{2 + 2,17x + 1,22\pi x^2}, \quad g(x) \approx \frac{1}{2 + 4,14x + 3,49x^2 + 6,67x^3} \quad (5.105)$$

равномерно на $0 < x < \infty$.

Если в сумме (5.104) выделить наиболее медленно убывающий член $\sum_1^\infty [\exp(2\pi\delta ji)/j^{3/2}]$, то ряд быстро сходится. Выделенный ряд может быть вычислен с использованием нашего эффективного приближения для функций $C_\beta(x)$, $S_\beta(x)$ (см. раздел 3.4). Окончательно приходим к следующему высокочастотному представлению:

$$G_1^+(s) \approx \frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{s+\chi}} \exp \left\{ \frac{i-1}{2} \left\{ \frac{iC_{3/2}(s_*\sqrt{2\chi/\pi}) - S_{3/2}(s_*\sqrt{2\chi/\pi})}{s_*\sqrt{2\pi\chi}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^\infty \frac{e^{2\pi\delta ji}}{j} \left[if\left(s_*\sqrt{\frac{2}{\pi}\chi j}\right) + g\left(s_*\sqrt{\frac{2}{\pi}\chi j}\right) - \frac{i}{s_*\sqrt{2\pi\chi j}} \right] \right\} \right\}, \quad (5.106)$$

где функции f , g определяются из (5.105) и $C_{3/2}$, $S_{3/2}$ раздела 3.4. Соответствующее высокочастотное приближение для $G_2^+(s)$ может быть получено схожим образом.

Общий член ряда (5.106) убывает как $O(j^{-5/2})$, поэтому данная формула действительно позволяет проводить эффективные вычисления. Сходимость ряда в (5.106) более медленная при $\delta \rightarrow 0$, так как в этой области присутствует некоторое количество малых $s_{*m} = \sqrt{(\pi m)^2 - \chi^2}/\chi \sim \sqrt{\delta}$ и процедура ускорения в данном диапазоне становится неэффективной.

Материал двух последних разделов изложен в работах авторов [114, 115].

Примечание. Задачи, рассмотренные в двух последних разделах, приводят к интегральным уравнениям, содержащим два независимых безразмерных параметра. Первый из них — чисто геометрический и характеризует относительную длину разреза, т.е. $d = l/a$. Второй параметр χ относится к частоте и становится большим на высоких частотах. Такой тип высокочастотных задач — яркий пример того, как эвристические идеи могут привести к ошибочным заключениям. В самом деле, в рассматриваемом случае высокочастотной дифракции длина волны становится асимптотически малой в сравнении с длиной разреза или шириной структуры. В этой связи существует два весьма распространенных (ошибочных) эвристических мнения. Первое из них исходит из того факта, что если ширина (толщина) волновода значительно превышает длину волны, то основной асимптотический член решения на пластине совпадает с тем, что получается в задаче для полуплоскости. Другая ошибочная точка зрения основана на том, что решение для конечной плиты асимптотически такое же, как и для полубесконечной, так как ее размер значительно превышает длину волны. В обоих случаях игнорируется тот факт, что с ростом частоты обе размерные величины становятся большими по сравнению с длиной волны одновременно. Формулы, выведенные в настоящей главе, учитывают истинное поведение волн с множеством переотражений между лицевыми гранями волновода.

5.5. Волны в упругом полупространстве. Функция Рэлея

Рассмотрим вертикальные гармонические колебания твердого штампа, соединенного с упругой полуплоскостью (двумерная задача). Для данной проблемы, как и во многих задачах, изученных выше, выбор метода исследования зависит от значения частоты. Как обычно, случаи низких и средних частот можно изучить, используя обыкновенные (аналитические или численные) методы. С ростом частоты данные методы ведут к потере вычислительной устойчивости. Именно поэтому здесь мы снова проведем асимптотический анализ, подходящий только для высокочастотного случая.

Для вывода основного интегрального уравнения рассматриваемой контактной задачи динамической теории упругости вернемся к равенствам (5.41), которые устанавливают соотношения между компонентами тензора напряжений и вектора смещения. В случаях, когда известна нормальная составляющая напряжений, приходим к интегральному уравнению (5.45) динамической теории трещин. Если, наоборот, известна амплитуда нормального смещения, тогда из уравнения (5.41) легко выводится интегральное уравнение первого рода для контактной задачи

$$\int_{-1}^1 p(\xi) K(\chi|x-t|) d\xi = \frac{\mu}{a} w, \quad |x| \leq 1, \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_*(s) e^{-isx} ds,$$

$$L_*(u) = \frac{\sqrt{u^2 - \beta^2}}{4u^2 \sqrt{u^2 - \beta^2} \sqrt{u^2 - 1} - (2u^2 - 1)^2},$$

$$\chi = ak_s, \quad \beta = k_p/k_s = c_s/c_p < 1. \quad (5.107)$$

В уравнении (5.107) $p(x)$ — амплитуда нормальной составляющей контактного давления (область контакта свободна от трения), w — амплитуда колебаний штампа, χ — параметр (большой на больших частотах), μ — модуль сдвига и a — полуширина штампа.

Как и в предыдущих разделах, применим идею, основанную на том, что исходное уравнение (5.107) (в точности) эквивалентно системе

$$\int_0^{\infty} \varphi(\xi) K(x - \xi) d\xi = \chi + \int_0^{\infty} [\varphi(2\chi + \tau) - v(\tau)] K(x + \tau) d\tau, \quad x \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) K(\chi|x - \xi|) d\xi = 1, \quad |x| < \infty, \quad (5.108)$$

если

$$p(x) = \frac{\mu}{a} w \{ \varphi[\chi(1+x)] + \varphi[\chi(1-x)] - v(x) \}, \quad |x| \leq 1. \quad (5.109)$$

Выше было показано, что во многих задачах последний интеграл в (5.108) можно отбросить и асимптотически уравнение (5.107) становится уравнением Винера–Хопфа на полубесконечном интервале. Обычно это приводит к ошибке порядка $\exp(-\chi\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) равномерно по x . Иногда ошибка носит степенной характер, т.е. становится более определяющей. Ниже мы покажем, что в рассматриваемой задаче «хвост» в правой части уравнения (5.107) — асимптотически малая величина как раз степенного порядка, а именно равномерно по $x \geq 0$ справедлива следующая оценка:

$$\int_0^{\infty} [\varphi(2\chi + \tau) - v(\tau)] K(x + \tau) d\tau = O(\chi^{-1/2}), \quad \chi \rightarrow \infty. \quad (5.110)$$

Снова наша цель — построение главного члена асимптотики. Эвристически оценка (5.110) снова означает, что главный член асимптотики (5.109) определяется из решения для двух полубесконечных штампов (5.108) и одного бесконечного.

Решение уравнения свертки (5.108) строится при помощи преобразования Фурье и задается выражением

$$v(x) = -\frac{i}{\beta\chi} \equiv v. \quad (5.111)$$

Для того чтобы решить уравнение на полуоси

$$\int_0^{\infty} \varphi(\xi) K(x - \xi) d\xi = \chi, \quad (5.112)$$

необходимо факторизовать символическую функцию (образа Фурье ядра). Как известно [3, 15], решение уравнения (5.112) устойчиво к малым возмущениям символа на вещественной оси, поэтому применим приближенную факторизацию (ср. раздел 1.2).

Символическая функция $L_*(u)$ является комбинацией четырех квадратных корней $\sqrt{s + \beta}$, $\sqrt{s + 1}$, $\sqrt{s - \beta}$, $\sqrt{s - 1}$, причем каждый из них имеет точку ветвления. Проведем в комплексной плоскости s разрезы (ср. раздел 1.1), которые соединяют точки $s = -\beta$ и $s = -1$ с бесконечностью в нижней полуплоскости, а точки $s = \beta$ и $s = 1$ — с бесконечностью в верхней полуплоскости. Помимо точек ветвления на вещественной оси ($\text{Im}(s) = 0$) существует два полюса Рэлея символической функции: $a = \pm s_1$, $s_1 > 1$. Согласно принципу предельного поглощения (см. раздел 3.2) контур интегрирования в интегральном представлении ядра в (5.107) совпадает с вещественной осью, огибая положительные особенности снизу, а отрицательные — сверху.

Поведение функции $L_*(s)$ качественно различно на разных отрезках вещественной оси. Для $|s| \geq 1$ она вещественна, для $\beta < |s| < 1$ комплекснозначна, а для $|s| \leq \beta$ принимает мнимые значения.

Аппроксимируем символ $L_*(s)$ выражением

$$\begin{aligned} L_*(s) &= \sqrt{s^2 - \beta^2} \frac{4s^2 \sqrt{s^2 - \beta^2} \sqrt{s^2 - 1} + (2s^2 - 1)^2}{16s^4 (s^2 - \beta^2)(s^2 - 1) - (2s^2 - 1)^4} \approx \\ &\approx L(s) = \frac{A\sqrt{s^2 - \beta^2}}{(s^2 - s_1^2)(s^2 - z^2)(s^2 - \bar{z}^2)} M_+(s) M_-(s), \quad (5.113) \\ M_{\pm}(s) &= Bs\sqrt{s \pm \beta} \sqrt{s \pm 1} + (\sqrt{2} s \pm 1)^2 \quad (A, B, \operatorname{Im} z > 0). \end{aligned}$$

Эта функция $L(s)$, как и $L_*(s)$, будучи четной, имеет два полюса Рэлея $s = \pm s_1$ и обладает тем же качественным поведением на различных интервалах вещественной оси. Более того, она ведет себя так же, как исходная функция, в нуле и на бесконечности. Кроме того, на всех этих интервалах она имеет тот же знак мнимой части, что необходимо для того, чтобы выполнялась теорема единственности. Выражение $M_+(s)$ имеет нуль в верхней полуплоскости, который должен быть компенсирован нулем в знаменателе $s = -\bar{z}$. Заметим, что точка $s = -z$ является другим его нулем.

С помощью данного приближения факторизация функции $L(s)$ может быть выполнена достаточно просто следующим образом:

$$L_+(s) = \frac{A\sqrt{s + \beta}}{(s + s_1)(s + z)(s + \bar{z})} M_+(s). \quad (5.114)$$

Реализация метода Винера–Хопфа для уравнения (5.112) приводит с помощью разложения (5.114) к выражению для образа Фурье функции $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} \Phi_+(s) &= C \frac{(s + s_1)(s + z)(s + \bar{z})}{s\sqrt{s + \beta} M_+(s)} = \\ &= C \frac{(s + s_1)(s + z)(s + \bar{z})}{s\sqrt{s + \beta} \Delta(s)} \left[Bs\sqrt{s + \beta} \sqrt{s + 1} - (\sqrt{2} s + 1)^2 \right], \quad (5.115) \\ \Delta(u) &= B^2 u^2 (u + \beta)(u + 1) - (\sqrt{2} u + 1)^4 = \\ &= d(s + z)(s + \bar{z})(s + \eta)(s + \bar{\eta}), \\ d &= B^2 - 4, \quad C = \frac{s_1 |z|^2}{A\sqrt{\beta}} \chi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_+(s) &= \frac{C}{d} \left(a_1 \frac{\sqrt{s + 1}}{s + \eta} + a_2 \frac{\sqrt{s + 1}}{s + \bar{\eta}} + \frac{a_3}{s\sqrt{s + \beta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_4}{(s + \eta)\sqrt{s + \beta}} + \frac{a_5}{(s + \bar{\eta})\sqrt{s + \beta}} \right), \quad (5.116) \\ a_1 &= B \frac{u_1 - \eta}{\bar{\eta} - \eta}, \quad a_2 = \bar{a}_1, \quad a_3 = -\frac{u_1}{|\eta|^2}, \end{aligned}$$

$$a_4 = \frac{(u_1 - \eta) (\sqrt{2} \eta - 1)^2}{\eta (\bar{\eta} - \eta)}, \quad a_5 = \bar{a}_4.$$

Тем самым получаем точное представление для функции $\varphi(x)$, так как справедливы следующие формулы обращения [66]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s + \eta) \sqrt{s + \beta}} &\Leftarrow -i \frac{e^{i\eta x}}{\sqrt{\beta - \eta}} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{-ix(\beta - \eta)} \right] \quad (x > 0), \\ \frac{\sqrt{s + 1}}{s + \eta} &\Leftarrow \frac{e^{-i(\pi/4 - x)}}{\sqrt{\pi x}} - ie^{i\eta x} \sqrt{1 - \eta} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{-ix(1 - \eta)} \right]. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Заметим, что данное решение может быть выражено в терминах интегралов Френеля.

Из явной формы функции $\varphi(x)$, так же как и напрямую из формулы (5.116), можно получить оценку

$$\varphi(x) \sim v + a e^{i\beta x} x^{-1/2}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.118)$$

которая означает, что решение в пограничном слое, как мы и ожидали, переходит во внешней зоне в решение для бесконечного штампа (5.111). Тем не менее видно, что этот процесс очень медленный.

Добавление к оценке (5.118) также очевидной оценки

$$K(x) \sim c_1 e^{iu_1 x} + c_2 e^{i\beta x} x^{-3/2} + c_3 e^{ix} x^{-3/2}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.119)$$

окончательно обосновывает асимптотическое представление (5.110).

Во многих приложениях важно установить связь между приложенной силой и осадкой основания штампа (предполагаем, что штамп невесомый)

$$\begin{aligned} P = b \int_{-1}^1 p(x) dx &= \mu w \int_{-1}^1 \{ \varphi[\chi(1 + x)] + \varphi[\chi(1 - x)] - v \} dx = \\ &= \mu w \left\langle 2v + 2 \int_{-1}^{\infty} \{ \varphi[\chi(1 + x)] - v \} dx \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Последнее равенство справедливо в силу оценки (5.118) с ошибкой $O(\chi^{-1/2})$, которая равна ошибке построенного решения уравнения (5.107). Далее, так как

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\infty} \{ \varphi[\chi(1 + x)] - v \} dx &= \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\xi) - v H(\xi)] dt = \\ &= \frac{1}{\chi} [\Phi_+(s) - V_+(s)]_{s=0} \end{aligned} \quad (5.121)$$

($H(\xi)$ — функция Хевисайда), окончательно получаем следующее представление для податливости основания:

$$w = \frac{P}{2\mu} \frac{\beta}{CD\beta - i\chi}, \quad D = \frac{1}{d} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\eta} \left(a_1 + \frac{a_4}{\sqrt{\beta}} \right) \right] - \frac{a_3}{2\beta^{3/2}} \right\}. \quad (5.122)$$

Заметим, что постоянные C и D в уравнении (5.122) вещественны, так что, например, сдвиг фаз между осадкой и приложенной силой находится по формуле

$$\theta = -\arctg \left(\frac{\chi}{CD\beta} \right). \quad (5.123)$$

Примечание. В течение долгого времени задача факторизации классической функции Рэлея была неразрешимой проблемой и во многих приложениях, где необходима такая факторизация, применялись формулы точного разложения. Такой подход требует чрезмерно долгих вычислений с очень сложными интегралами. Вместо этого мы воспользовались приближенной факторизацией (5.113), которая сохраняет все качественные свойства исходной комплексной функции Рэлея (сравните с тем, что обсуждалось в разделе 1.2). С точки зрения точности приближение, сколь угодно близкое к истинной функции Рэлея, может быть получено введением стандартного множителя, представляющего собой комбинацию некоторых полиномов (это обсуждалось в разделе 1.2). Наши вычисления показывают, что предложенная аппроксимация, как следует из уравнения (5.113), дает точность в несколько процентов.

5.6. Динамическая контактная задача для упругого слоя

В этом разделе мы продемонстрируем, что асимптотический подход, разработанный в разделе 5.4 для волновых скалярных задач в акустическом слое, может быть распространен на случай упругого слоя (двумерная плоская задача).

Пусть жесткий штамп шириной $2b$ совершает вертикальные гармонические колебания на верхней свободной поверхности упругой полосы. При этом слой для определенности расположен на абсолютно твердом основании. Мы предлагаем, что трение в зоне контакта, так же как и между основанием и полосой, отсутствует. Как следует из результатов раздела 3.3, рассматриваемая задача может быть сведена к интегральному уравнению для неизвестного нормального давления $p(x)$, отнесенного к величине $\mu w/h$:

$$\int_{-a}^a p(\xi) K(x - \xi) d\xi = 1, \quad |x| < a \quad (a = b/h), \quad (5.124)$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s) e^{-i\chi x u} ds,$$

$$L(s) = L_1(s) - L_2(s), \quad L_1(s) = \sigma_1 / \Delta(s), \quad L_2(s) = \sigma_1 P_1(s) / \Delta(s),$$

$$P_1(s) = e^{-2\chi\sigma_1} + e^{-2\chi\sigma_2} - e^{-2\chi(\sigma_1+\sigma_2)}, \quad \chi = hk_s,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{s^2 - \beta^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{s^2 - 1}, \quad \beta = k_p/k_s = c_s/c_p < 1,$$

$$\Delta(s) = 4s^2\sigma_1\sigma_2 G_1(s)F_2(s) - (2s^2 - 1)^2 G_2(s)F_1(s),$$

$$G_j(s) = 1 - e^{-2\chi\sigma_j}, \quad F_j(s) = 1 + e^{-2\chi\sigma_j}, \quad j = 1, 2,$$

где h — толщина слоя. Уравнение (5.124) записано в безразмерной форме. Функция $\Delta(s)$ представляет собой функцию Рэлея-Лэмба.

Подобно скалярной задаче (см. предыдущий раздел) количество нулей и полюсов символической функции $L(s)$, расположенных на вещественной оси, безгранично растет с возрастанием частоты (т.е. с ростом безразмерного параметра χ). Вещественные нули $\pm\alpha_k$ и $\pm\beta_k$ символа таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sqrt{1 - \left(\frac{\pi k}{\chi}\right)^2} \quad (k = 1, \dots, n_\alpha), \\ \beta_k &= \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\pi k}{\chi}\right)^2} \quad (k = 1, \dots, n_\beta). \end{aligned} \quad (5.125)$$

В принципе метод разделов 5.3 и 5.4 может быть напрямую применен к интегральному уравнению (5.124). Тем не менее обоснование используемого подхода будет более сложным. Поэтому применим немного отличную идею, которая приводит к главному асимптотическому члену более прямо и быстро. Выделим из ядра $K(x)$ функцию $K_1(x)$ с символом $L_1(s)$, которая не имеет нулей на вещественной оси и обладает следующим алгебраическим поведением при $u \rightarrow \pm\infty$:

$$\int_{-a}^a p(\xi) K_1(x - \xi) d\xi = 1 + \int_{-a}^a p(\xi) K_2(x - \xi) d\xi. \quad (5.126)$$

Так как символическая функция $L_1(s)$ ядра $K_1(x)$ не имеет вещественных полюсов, стандартное представление исходного уравнения, справедливое на интервале конечной длины, в виде комбинации трех уравнений, позволяет построить внешнее (т.е. вне асимптотически малых пограничных слоев в окрестности концов штампа) решение при $\chi \rightarrow \infty$ распространением интегрального оператора с ядром K_1 на полную вещественную ось. Таким образом, приходим к уравнению свертки, решение которого легко строится при помощи преобразования

Фурье. Данная техника сводит уравнение к простому виду

$$\int_{-a}^a p(\xi) Q(x - \xi) d\xi = l_0, \quad |x| < a, \quad (5.127)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(s) e^{-i\chi s x} ds,$$

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = (1 - e^{-2\chi\sigma_1}) (1 - e^{-2\chi\sigma_2}),$$

$$l_0 = \left. \frac{\Delta}{\sigma_1} \right|_{s=0} = -\frac{i}{\beta} (1 + e^{2i\chi\beta}) (1 - e^{2i\chi}).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi s x} ds = \frac{1}{\chi} \delta(x), \quad (5.128)$$

уравнение (5.127) можно свести к следующему виду:

$$p(x) - \chi \int_{-a}^a p(\xi) Q_1(x - \xi) d\xi = l_0 \chi, \quad |x| < a, \quad (5.129)$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(s) e^{-i\chi s x} ds, \quad P_1(s) = 1 - G(s).$$

Очевидно, ядро $Q_1(x)$ непрерывно (более того, оно даже бесконечно дифференцируемо).

Теперь по аналогии с интегральными уравнениями первого рода, применим стандартную идею эквивалентности уравнения (5.129) паре уравнений для двух новых неизвестных функций $\varphi(x)$ и $v(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \chi \int_0^{\infty} \varphi(\xi) Q_1(x - \xi) d\xi &= l_0 \chi - \chi \int_0^{\infty} [\varphi(2a + \xi) - v] Q_1(x + \xi) d\xi, \\ x &> 0, \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$v(x) - \chi \int_0^{\infty} v(\xi) Q_1(x - \xi) d\xi = l_0 \chi, \quad |x| < \infty, \quad (5.131)$$

если

$$p(x) = \varphi(a + x) + \varphi(a - x) - v, \quad |x| < a. \quad (5.132)$$

На основании свойств ядра $Q_1(x)$ докажем, как обычно, что интеграл в правой части уравнения (5.130) асимптотически мал. По преж-

ней схеме сначала получим асимптотическое выражение для $Q_1(x)$ при $\chi \rightarrow \infty$. Принципиальная проблема связана с оценкой интеграла

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi s x} e^{-2\chi(\sigma_1 + \sigma_2)} ds. \quad (5.133)$$

Можно легко показать, что главный вклад в J дает окрестность стационарной точки s_* фазы F

$$F(s, x) = sx + 2\sqrt{1 - s^2} + 2\sqrt{\beta^2 - s^2}, \quad (5.134)$$

где $0 < s_* < \beta$.

Можно также показать, что F'_s — монотонно убывающая непрерывная функция для любого фиксированного $x > 0$, где $F'_s > 0$ при $u = 0$ и $F'_s < 0$ при $s = \beta - 0$. Следовательно, уравнение $F'_s = 0$, определяющее стационарную точку s_* , всегда имеет единственное решение. В результате получаем

$$J \sim \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2\pi\chi}} \frac{\exp(i\chi F(s_*, x))}{\sqrt{|F''_{ss}(s_*, x)|}}, \quad \chi \rightarrow \infty. \quad (5.135)$$

Асимптотические оценки двух других интегралов, входящих в ядро $Q_1(x)$, могут быть выведены с использованием асимптотического поведения функции Ханкеля для больших аргументов. Тогда окончательно приходим к следующей оценке:

$$Q_1 \sim \chi^{-1/2} \left[A_1(x) e^{i\chi F(s_*, x)} + A_2(x) e^{i\chi \beta \sqrt{4+x^2}} + A_3(x) e^{i\chi \sqrt{4+x^2}} \right], \quad (5.136)$$

где $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ — некоторые гладкие функции, не содержащие параметра χ .

Дальнейшая оценка интеграла в правой части (5.130) проводится с применением хорошо известного метода интегрирования по частям (см. раздел 1.4). Так как для $x > 0$ фазовая функция $(4 + x^2)^{1/2}$ не имеет стационарной точки, интегрирование показывает, что вклад «хвоста» от слагаемых, связанных с функциями A_2 и A_3 , имеет порядок $\chi^{-1/2}$. Для того чтобы установить асимптотическое поведение слагаемого, связанного с A_1 , сначала покажем, что функция $F(s_*, x)$ не имеет стационарной точки (как функция от x) при $x > 0$. В самом деле, уравнение $F''_s(s, x) = 0$ определяет стационарную точку $s_* = s_*(x)$, так что $F(s_*, x) = F[s_*(x), x]$. Из данного соотношения следует, что $dF/dx = F'_s s'_* + F'_x = F'_x = s = s_*(x)$.

Таким образом, доказано, что $dF/dx = 0$ только для $s_* = 0$, что возможно лишь при $x = 0$ (это можно доказать напрямую). Из последнего следует, что вклад слагаемого с A_1 в правую часть интеграла в (5.130) также порядка $\chi^{-1/2}$.

Опуская подробности метода Винера–Хопфа для уравнения (5.130) и тривиальное решение уравнения свертки (5.131), можем выписать окончательный результат

$$p(x) = \frac{\chi}{\beta \operatorname{tg} \chi \beta} - \frac{i\pi l_0 \chi}{2G_-(0)} \left\{ \sum_{j=1}^{n_\alpha} \frac{jG_+(\alpha_j)H_j(x, 1)}{1 - \exp[-2\chi\sigma_1(\alpha_j)]} + \sum_{j=1}^{n_\beta} \frac{jG_+(\beta_j)H_j(x, \beta)}{1 - \exp[-2\chi\sigma_2(\beta_j)]} \right\}, \quad (5.137)$$

$$H_j(x, \beta) = \frac{\exp \left[i\sqrt{(\chi\beta)^2 - (\pi j)^2} (a+x) \right] + \exp \left[i\sqrt{(\chi\beta)^2 - (\pi j)^2} (a-x) \right]}{(\chi\beta)^2 - (\pi j)^2},$$

где $G(s) = G_+(s)G_-(s)$ — факторизация функции $G(s)$.

Примечание. Прямое численное решение исходного уравнения (5.124) сопряжено с существенными сложностями. Они вызваны тем, что для $\chi \gg 1$ ядро представляет собой сумму дельтаподобных и некоторых строго осциллирующих функций, которые делают процедуру вычисления весьма нестабильной.

С ростом частотного параметра χ график контактного давления становится волноподобным. Данный феномен, так же как и в случае скалярной акустики, объясняется множественными переотражениями лучей от нижней части слоя и, как было замечено в предыдущих разделах, отличается от аналогичных задач для полуплоскости (раздел 5.5), где асимптотика контактного давления с ростом частоты стремится к равномерному распределению.

МЕТОДЫ КОРОТКОВОЛНОВОЙ АСИМПТОТИКИ

6.1. Метод Шоха для трехмерных волновых полей

Общепризнанно, что современные компьютеры в принципе позволяют эффективно вычислять волновые поля прямыми методами для произвольных краевых задач. Это действительно так, когда мы говорим о низких и средних частотах. В предисловии к книге говорилось, почему высокочастотный режим так сильно отличается от обычных случаев при реализации вычислений на компьютере. Коротко, с ростом частоты он требует слишком большого числа узлов сетки.

Настоящий раздел посвящен различным методам эффективного вычисления высокочастотных волновых полей. В предыдущей главе мы отметили ряд неожиданных особенностей высокочастотных волновых процессов. Другое интересное свойство также неожиданно: некоторые точные решения, выписанные в явной форме, совершенно непригодны для компьютерных расчетов.

Пример. Рассмотрим упругое полупространство $z \geq 0$, плоская граничная поверхность которого $z = 0$ свободна от касательной нагрузки. Осциллирующее с угловой частотой ω нормальное давление амплитуды p_0 приложено к поверхности по прямоугольной области $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Уравнения движения (см. раздел 1.9) в данной трехмерной задаче имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} c_p^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_s^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \omega^2 u_x &= 0, \\ c_p^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_s^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \omega^2 u_y &= 0, \\ c_p^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + c_s^2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + (c_p^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \omega^2 u_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Граничные условия на плоской границе ($z = 0$)

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{zz} = p_0(x, y) &= \begin{cases} p_0, & (x, y) \in S = \{|x| \leq a\} \times \{|y| \leq b\}, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Двойное преобразование Фурье по переменным $x, y, |x| < \infty, |y| < \infty$, примененное к этим уравнениям, приводит в образах Фурье компонент смещения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} c_s^2 U_x'' + [\omega^2 - (c_p^2 s_1^2 + c_s^2 s_2^2)] U_x + (c_p^2 - c_s^2) (-is_1) (-is_2 U_y + U_z') &= 0, \\ c_s^2 U_y'' + [\omega^2 - (c_p^2 s_2^2 + c_s^2 s_1^2)] U_y + (c_p^2 - c_s^2) (-is_2) (-is_1 U_x + U_z') &= 0, \\ c_p^2 U_z'' + (\omega^2 - c_s^2 s^2) U_z + (c_p^2 - c_s^2) (-is_1 U_x' - is_2 U_y') &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2,$$

где $U_x = U_x(s_1, s_2, z)$, $U_y = U_y(s_1, s_2, z)$, $U_z = U_z(s_1, s_2, z)$ — преобразования Фурье соответствующих компонент вектора смещения и производные берутся по переменной z . Решение данной системы может быть найдено стандартной операцией с характеристическим многочленом. Для этого можно искать решение в виде

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} e^{\alpha z}, \quad (6.4)$$

где характеристический параметр α должен быть определен как корень характеристического многочлена. Последний получается подстановкой представления (6.4) в систему (6.3), что приводит к однородной линейной алгебраической системе размера 3×3 . Так как мы ищем ненулевое решение системы, ее главный определитель должен быть равен нулю. Это приводит к характеристическому уравнению, которое в рассматриваемой задаче после некоторых преобразований может быть сведено к простой форме

$$(s^2 - \alpha^2 - k_s)^2 (s^2 - \alpha^2 - k_p) = 0, \quad (6.5)$$

где $k_p = \omega/c_p$ и $k_s = \omega/c_s$ — продольное и поперечное волновые числа соответственно.

Как можно видеть из (6.5), у данного бикубического уравнения существует два простых α_1, α_2 и два двукратных α_3, α_4 :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \pm \gamma(s), \quad \alpha_{3,4} = \pm q(s), \\ \gamma(s) &= \sqrt{s^2 - k_p^2}, \quad q(s) = \sqrt{s^2 - k_s^2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из уравнения (6.6) видно, что основное решение является комбинацией некоторых структур типа (6.4) и в нашем случае может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} U_x &= iAs_1 e^{-\gamma(s)z} - Bq(s) e^{-q(s)z}, \\ U_y &= iAs_2 e^{-\gamma(s)z} - Cq(s) e^{-q(s)z}, \\ U_z &= A\gamma(s) e^{-\gamma(s)z} + (is_1 B + is_2 C) e^{-q(s)z}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где мы сохранили только те характеристические значения α , которые удовлетворяют граничным условиям излучения при $z \rightarrow +\infty$, т. е. взят знак минус во всех парах $\pm\gamma(s)$, $\pm q(s)$.

Оставшиеся неизвестные постоянные A, B, C также зависят от параметров преобразования Фурье (s_1, s_2) и должны быть определены с учетом граничных условий (6.2) на граничной плоскости $z = 0$. Заметим, что компоненты тензора напряжений, присутствующие в соотношениях (6.2), выражены в терминах компонент вектора смещения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xz}}{\rho} &= c_s^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \frac{\sigma_{yz}}{\rho} = c_s^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \frac{\sigma_{zz}}{\rho} &= c_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_p^2 - 2c_s^2) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

После некоторых преобразований выражения (6.8) могут быть переписаны в образах Фурье в виде

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\sigma}_{xz}}{\rho c_s^2} &= U'_x - i s_1 U_z = -2i s_1 \gamma A e^{-\gamma(s)z} + \\ &\quad + [(s_1^2 + q^2) B + s_1 s_2 C] e^{-q(s)z}, \\ \frac{\tilde{\sigma}_{yz}}{\rho c_s^2} &= U'_y - i s_2 U_z = -2i s_2 \gamma A e^{-\gamma(s)z} + \\ &\quad + [s_1 s_2 B + (s_2^2 + q^2) C] e^{-q(s)z}, \\ \frac{\tilde{\sigma}_{zz}}{\rho c_s^2} &= \frac{k_s^2}{k_p^2} U'_z + \left(2 - \frac{k_s^2}{k_p^2} \right) (i s_1 U_x + i s_2 U_y) = \\ &= (k_s^2 - 2s^2) A e^{-\gamma z} - 2iq(s_1 B + s_2 C) e^{-qz} \end{aligned} \quad (6.9)$$

(здесь тильда обозначает соответствующее преобразование Фурье компонент тензора напряжений).

Требуя, чтобы эти выражения удовлетворяли граничным условиям (6.2), которые в преобразованиях Фурье приобретают вид

$$\tilde{\sigma}_{xz}(s_1, s_2, 0) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{yz}(s_1, s_2, 0) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{zz}(s_1, s_2, 0) = P_0(s_1, s_2), \quad (6.10)$$

приходим к линейной алгебраической системе размера 3×3 для нахождения коэффициентов A, B, C . Решая данную систему и принимая во внимание, что для приложенного равномерно распределенного нормального, осциллирующего во времени давления $p_0 \equiv \text{const}$

$$P_0(s_1, s_2) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b p_0 e^{i(s_1 x + s_2 y)} dx dy = 4p_0 \frac{\sin(as_1) \sin(bs_2)}{s_1 s_2}, \quad (6.11)$$

окончательно приходим к следующему точному аналитическому представлению для наиболее интересных физических величин — компонен-

тов тензора напряжения — в явном виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x, y, z) &= \frac{2ip_0}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(2s^2 - k_s^2) \frac{(e^{-\gamma z} - e^{-qz}) \sin(as_1) \sin(bs_2)}{s_2 \Delta(s)} \times \\ &\quad \times e^{-i(xs_1 + ys_2)} ds_1 ds_2, \\ \sigma_{yz}(x, y, z) &= \frac{2ip_0}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(2s^2 - k_s^2) \frac{(e^{-\gamma z} - e^{-qz}) \sin(as_1) \sin(bs_2)}{s_1 \Delta(s)} \times \\ &\quad \times e^{-i(xs_1 + ys_2)} ds_1 ds_2, \\ \sigma_{zz}(x, y, z) &= \frac{p_0}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(2s^2 - k_s^2)^2 e^{-\gamma z} - 4s^2 \gamma q e^{-qz}] \sin(as_1) \sin(bs_2)}{s_1 s_2 \Delta(s)} \times \\ &\quad \times e^{-i(xs_1 + ys_2)} ds_1 ds_2, \quad (6.12)\end{aligned}$$

где $\Delta(s) = (2s^2 - k_s^2)^2 - 4s^2 \gamma q$ — это вновь классическая функция Рэлея.

Вычисление интегралов (6.12) — непростая задача. В высокочастотном режиме, где $k_p a \gg 1$, $k_p b \gg 1$, оно требует слишком большого времени даже на современных мощных компьютерах. Для того чтобы преодолеть неприятности подобного рода, А. Шох [118] предложил метод, который позволяет для области S произвольной формы свести рассматриваемую задачу без каких-либо приближений к вычислению однократного интеграла (вместо двойного) по интервалу конечной длины — фантастический результат!

Идея его метода такова. Сначала изучим колебания (линейная теория) твердой плиты на свободной поверхности скалярного акустического полупространства $z = 0$ (рис. 6.1).

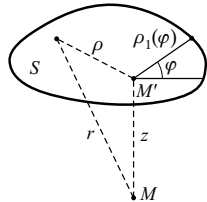


Рис. 6.1. К вычислению волнового поля, созданного плоским вибратором

Если амплитуда колебаний плоского вибратора $v_0 \equiv \text{const}$, $(x, y) \in S$, то задача сводится к уравнению Гельмгольца для акустического давления

$$\Delta p(x, y, z) + k^2 p(x, y, z) = 0, \quad z \geq 0. \quad (6.13)$$

Если вибратор скреплен с плоским экраном, занимающим область $z = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S$, то граничное условие

$$z = 0: \quad \frac{\partial p}{\partial z} = g(x, y) = \begin{cases} i\omega\rho_0 v_0, & (x, y) \in S, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S. \end{cases} \quad (6.14)$$

Обозначим, как и в главе 2, функцию Грина для полного трехмерного акустического пространства через

$$\Phi(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}, \quad (6.15)$$

где точка M с прямоугольными координатами (x_0, y_0, z) есть точка наблюдения. Тогда, вспоминая граничное свойство нормальной производной потенциала простого слоя (см. раздел 2.1), легко получить точное решение поставленной задачи

$$p(M) = -2 \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \Phi(r) dx dy = -\frac{i\omega\rho_0}{2\pi} v_0 \iint_S \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6.16)$$

так как граничное значение нормальной производной данного выражения равно

$$\begin{aligned} & -2 \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \frac{\partial \Phi(\rho, 0)}{\partial z} dx dy + g(x_0, y_0), \\ & \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Последний интеграл равен нулю, так как $\partial \Phi(r)/\partial z = (\partial \Phi(r)/\partial r) \times (r \cdot n(x_0, y_0)) = 0$ и поскольку $r \perp n$ при $z = 0$.

Идея Шоха работает следующей образом. Расположим начало цилиндрической системы координат в вертикальной проекции точки наблюдения, т.е. в точке $M'(x_0, y_0, 0)$ (см. рис. 6.1). Для простоты рассмотрим здесь только случай, когда $M' \in S$. Если M' лежит вне области S , все преобразования могут быть построены схожим образом. Теперь формула (6.16) показывает, что

$$p(M) = -\frac{i\omega\rho_0}{2\pi} v_0 \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} = -\frac{i\omega\rho_0}{2\pi} v_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_1(\varphi)} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \rho d\rho. \quad (6.18)$$

Далее применим замену переменной (см. рис. 6.1): $r^2 = \rho^2 + z^2$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$, $r dr = \rho d\rho$. Тогда выражение (6.18) преобразуется к виду

$$p(M) = -\frac{i\omega\rho_0}{2\pi} v_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_z^{r_1(\varphi)} e^{ikr} dr = \frac{\omega\rho_0}{k} v_0 \left[e^{ikz} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr_1(\varphi)} d\varphi \right], \quad (6.19)$$

где $r_1(\varphi) = (z^2 + \rho_1^2)^{1/2}$.

Поставленная цель достигнута: трехмерное волновое поле в точном виде выражено через одномерный интеграл по интервалу конечной длины.

В некоторых простых случаях уравнение (6.19) позволяет аналитически вычислить полное волновое поле. К примеру, если S — это диск радиуса a , то

$$p(M) = \frac{\omega \rho_0}{k} v_0 \left(e^{ikz} - e^{ik\sqrt{a^2+z^2}} \right). \quad (6.20)$$

Примечание. Выше мы упомянули, что вычисление интегралов типа (6.12) для высоких частот — трудная задача даже при вычислениях на современных компьютерах. В некоторых случаях его можно трактовать приближенно. Например, в дальнем поле подобные интегралы могут быть рассчитаны асимптотически (так называемое *приближение Фраунгофера*). Тем не менее для малых расстояний достаточно сложно получить какой-либо результат с приемлемой точностью при прямой численной трактовке интеграла (6.12). Такие трудности возникают даже в задачах скалярной акустики, но в упругом случае подынтегральное выражение становится еще более сложным.

6.2. Высокочастотные волновые поля в упругом полупространстве

Подход Шоха может быть распространен на более сложные задачи. Сначала приемим его для скалярной задачи, когда на граничную плоскую поверхность акустического полупространства действует равномерно распределенное давление $p(x, y, 0) = p_0$, $(x, y) \in S$, по области S , так что $p(x, y, 0) = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S$. Здесь точное решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя (см. раздел 2.1)

$$p(M) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \frac{\partial \Phi(r)}{\partial z} dx dy = \frac{p_0}{2\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) dx dy, \quad (6.21)$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2},$$

где $M(x_0, y_0, z)$ — точка наблюдения. Это представление справедливо вследствие граничного свойства потенциала двойного слоя (раздел 2.1), которое в данном случае имеет вид

$$2 \iint_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \frac{\partial \Phi(\rho, 0)}{\partial z} dx dy + p(x_0, y_0), \quad \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (6.22)$$

Последний интеграл равен нулю, так как $\partial \Phi(r)/\partial z = (\partial \Phi(r)/\partial r) \times (r \cdot n(x, y)) = 0$ и поскольку $r \perp n$ при $z = 0$.

Из формулы (6.21) получим

$$\begin{aligned}
 p(M) &= \frac{p_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} dx dy = \frac{p_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_z^{r_1(\varphi)} e^{ikr} dr = \\
 &= -\frac{p_0}{ik} \frac{\partial}{\partial z} \left[e^{ikz} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr_1(\varphi)} d\varphi \right] = -p_0 \left[e^{ikz} - \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr_1(\varphi)}}{r_1(\varphi)} d\varphi \right].
 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Задача становится намного сложнее, если среду нельзя рассматривать как акустическую. Так, решение для нормальной точечной силы, приложенной к свободной поверхности упругого полупространства, нельзя выразить в элементарной форме, но оно представимо в терминах интеграла Фурье–Бесселя. Для того чтобы прийти к такому представлению, можно применить технику, схожую с изложенной в предыдущем разделе, в случае $p_0(x, y) = p_0 \delta(x - x_0, y - y_0)$. Тогда $P_0(s_1, s_2) = p_0 e^{i(x_0 s_1 + y_0 s_2)}$, так что, например, для компоненты напряжения σ_{zz} имеем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^0(x, y, z) &= \\
 &= \frac{p_0}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(2s^2 - k_s^2)^2 e^{-\gamma z} - 4s^2 \gamma q e^{-qz}}{\Delta(s)} e^{-i[(x-x_0)s_1 + (y-y_0)s_2]} ds_1 ds_2.
 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Если применить здесь замену переменных $x - x_0 = \rho \cos \psi$, $x - x_0 = \rho \sin \psi$, $s_1 = s \cos \mu$, $s_2 = s \sin \mu$ и перейти от прямоугольной системы координат к цилиндрической, то выражения под двойным интегралом в полярной системе координат приобретают вид $(x - x_0)s_1 + (y - y_0)s_2 = s\rho \cos(\mu - \psi)$. Так как все слагаемые подынтегрального выражения зависят только от $s = (s_1^2 + s_2^2)^{1/2}$, легко заметить, что интегрирование по s дает

$$\sigma_{zz}^0(\rho, z) = \frac{p_0}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{(2s^2 - k_s^2)^2 e^{-\gamma z} - 4s^2 \gamma q e^{-qz}}{\Delta(s)} s ds \int_0^{2\pi} e^{-is\rho \cos(\mu - \psi)} d\mu. \quad (6.25)$$

Поскольку для произвольной периодической подынтегральной функции интеграл может быть взят по любому интервалу длиной в период данной функции, то можно напрямую доказать, что выражение (6.25) не зависит от полярного угла ψ :

$$\int_0^{2\pi} e^{-is\rho \cos(\mu - \psi)} d\mu = \int_0^{2\pi} e^{-is\rho \cos \mu} d\mu = 2\pi J_0(s\rho) \quad (6.26)$$

(J_0 — функция Бесселя), так что

$$\sigma_{zz}^0(\rho, z) = \frac{p_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(2s^2 - k_s^2)^2 e^{-\gamma z} - 4s^2 \gamma q e^{-qz}}{\Delta(s)} s J_0(s\rho) ds. \quad (6.27)$$

Далее основная идея такова. Для высоких частот мы можем оценить данный интеграл асимптотически. К этому интегралу может быть применен метод стационарной фазы (см. раздел 1.4) после замены переменной $s = k_p \tilde{s}$ (первая экспонента в (6.27)) или $s = k_p \tilde{s}$ (вторая экспонента), поскольку при этом появляется осциллирующая экспоненциальная функция с фазой, содержащей большой частотный параметр. Он также встречается в аргументе функции Бесселя, и необходимо подобрать подходящую асимптотическую формулу для сведения интеграла к форме, содержащей лишь осциллирующие экспоненциальные функции. Основной вклад в рассматриваемый интеграл вносит стационарная точка $s = \rho/r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} / [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{1/2}$, что позволяет сделать следующую асимптотическую оценку ($\beta = k_p/k_s = c_s/c_p < 1$):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^0(\rho, z) &\sim -\frac{ip_0 z}{2\pi r^2} \left[k_p e^{ik_p r} f_1\left(\frac{\rho}{r}\right) + k_s e^{ik_s r} f_2\left(\frac{\rho}{r}\right) \right], \\ f_1(s) &= \frac{(2s^2 - \delta^2)^2}{(2s^2 - \delta^2)^2 + 4s^2 \sqrt{1 - s^2} \sqrt{\delta^2 - s^2}}, \\ f_2(s) &= \frac{4s^2 \sqrt{1 - s^2} \sqrt{\beta^2 - s^2}}{(2s^2 - 1)^2 + 4s^2 \sqrt{1 - s^2} \sqrt{\beta^2 - s^2}}, \quad \delta = 1/\beta. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Если теперь вибратор создает равномерно распределенную нормальную нагрузку p_0 , приложенную к свободной плоской граничной поверхности по области S , то формулы (6.28) позволяют действовать методом Шоха. В самом деле, вследствие линейности задачи полное волновое поле в произвольной точке внутри полупространства может быть вычислено как суперпозиция вкладов от всех точечных элементарных сил типа (6.28). Это приводит к следующей асимптотической формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^0(\rho, z) &= -\frac{ip_0 z}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ &\times \int_z^{r_1(\varphi)} \left[k_p e^{ik_p r} f_1\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) + k_s e^{ik_s r} f_2\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) \right] \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

В некотором смысле этот интеграл является альтернативным представлением интеграла из формулы (6.12). К сожалению, в отличие

от случая скалярной акустики внутренний интеграл в (6.29) нельзя вычислить аналитически, поэтому оценим его асимптотически. Такой подход не эквивалентен асимптотическому приближению интегралов типа (6.12), так как здесь мы имеем только большой безразмерный параметр $k_p r$ (или $k_s r$), который определяет, во сколько раз расстояние от текущего точечного источника больше длины волны. Напротив, асимптотическая оценка интеграла (6.12) связана с появлением двух больших геометрических безразмерных параметров — относительного (к длине волны) расстояния от точки наблюдения до приложенной нагрузки и относительного (тоже в сравнении с длиной волны) геометрического размера области S . С ростом частоты данные параметры конфликтуют друг с другом. Преобладание одного из них по отношению к другому порождает приближение дальней зоны Фраунгофера. В противном случае приходим к так называемому приближению Френеля. Наш подход, основанный на блестящих идеях Шоха, приводит к равномерной высокочастотной аппроксимации. Более того, в случае скалярной акустики данный подход дает точные формулы для волнового поля.

Эффективное высокочастотное представление можно получить, если применить к интегралу (6.29) стандартное интегрирование по частям. Ограничиваясь только главным асимптотическим членом, приходим к приближенному представлению

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^0(\rho, z) &= -\frac{p_0 z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} \left[e^{ik_p r} f_1\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) + e^{ik_s r} f_2\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) \right]_{z=r}^{r_1(\varphi)} = \\ &= p_0 \left[e^{ik_p z} - \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[e^{ik_p r} f_1\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) + e^{ik_s r} f_2\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) \right] \frac{d\varphi}{r_1(\varphi)} \right].\end{aligned}\quad (6.30)$$

Проблема эффективного расчета высокочастотного волнового поля в упругом полупространстве, таким образом, сведена методом Шоха к одномерному интегралу по конечному отрезку. В некоторых простых случаях он может быть вычислен аналитически. К примеру, для круглого диска радиуса a получаем из (6.30)

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= p_0 e^{ik_p z} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \times \\ &\times \left[e^{ik_p \sqrt{a^2 + z^2}} f_1\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) + e^{ik_s \sqrt{a^2 + z^2}} f_2\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) \right].\end{aligned}\quad (6.31)$$

Заметим, что в дальней зоне, как это следует из структуры функций f_1 и f_2 , последние выражения (6.30) и (6.31) вырождаются в соответствующие формулы для акустического полупространства. В ближнем

поле они обеспечивают высокую точность с относительной погрешностью всего лишь в несколько процентов, как было проверено для многих численных расчетов.

Примечание. Некоторые примеры применения метода, предложенного в этом разделе, приведены в работе [47]. Точность подхода — около 1% относительной ошибки, и он работает в реальном времени при реализации на персональном компьютере. Из нашего опыта, прямой численный расчет интегралов типа (6.12) требует в 10^2 – 10^3 раз больше вычислительных затрат, чем предложенный здесь подход.

Обзор существующих методов для вычисления упругих волновых полей может быть найден в книге [59].

6.3. Асимптотическая природа геометрической теории дифракции

Как и в физической теории дифракции Кирхгофа, можно найти множество разных формулировок геометрической теории дифракции в трактовках разных авторов. Хорошие обзоры представлены в книгах [89] (более физическая трактовка) и [4] (более математическая). В двух словах, теория Кирхгофа определяет главный асимптотический высокочастотный член решения на границе препятствия. Аналогично геометрическая теория дифракции определяет главный член высокочастотной асимптотики в произвольной точке наблюдения. Основы данной теории были заложены Келлером [96], но в этом разделе мы получим некоторые его классические результаты альтернативным методом, основываясь на решении Кирхгофа, что представляется более естественным.

Для большей определенности рассмотрим точечный источник x_0 акустической волны (двумерной), который падает на акустически твердое препятствие D с граничным контуром l . Интегральная формула Кирхгофа–Гельмгольца дает точное представление для решения в произвольной точке наблюдения x (см. раздел 2.2)

$$p^{\text{sc}}(x) = \int_l p(y) \frac{\partial \Phi(kr)}{\partial n_y} dl_y, \quad (6.32)$$

$$\Phi(kr) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \quad r = |x - y|,$$

где $p^{\text{sc}}(x)$ — рассеянное волновое поле в точке x ; $p(y)$, $y \in l$, — полное волновое давление на границе контура l .

Согласно физической теории дифракции Кирхгофа, главный асимптотический член для $p(y)$, $y \in l$, определяется следующим выражением (см. раздел 2.6):

$$p(y) = \begin{cases} 2p^{\text{inc}}(y), & y \in l^+, \\ 0, & y \in l^-, \end{cases} \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.33)$$

Так как падающая волна представляется такой же точечной функцией Грина, выраженной через функцию Ханкеля, она также имеет асимптотическое представление, поэтому можно принять

$$p^{\text{inc}}(y) = \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{r_0}}, \quad k \rightarrow \infty, \quad r_0 = |x_0 - y|. \quad (6.34)$$

Теперь, принимая во внимание, что

$$2 \frac{\partial \Phi(kr)}{\partial n_y} = e^{-\pi i/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \cos(n_y, r), \quad k \rightarrow \infty, \quad (6.35)$$

и собирая вместе формулы (6.32)–(6.35), при $k \rightarrow \infty$ получаем

$$p^{\text{sc}}(x) = e^{-\pi i/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{l^+} \frac{\cos(n_y, r)}{\sqrt{rr_0}} e^{ikS(y)} dl_y, \quad (6.36)$$

$$S(y) = r_0 + r = |x_0 - y| + |x - y|.$$

Теорема 1. Любая точка $y_0 \in l^+$ с равными углами $\widehat{n_y, r} = \widehat{n_y, r_0} = \theta$ является стационарной точкой фазовой функции $S(y)$.

Доказательство. Пусть существует точка подобного рода $y_0 \in l^+$. Рассмотрим текущую точку $y \in l^+$ из малой окрестности точки y_0 . Докажем, что y_0 — единственная стационарная точка среди всех y из данной окрестности. Для этого рассмотрим расстояние $|x_0 - y|$ как сторону треугольника, образованного тремя сторонами $L_0 = |x_0 - y_0|$, $r = |x_0 - y|$, $\Delta s = |y - y_0|$, и воспользуемся теоремой косинусов:

$$|x_0 - y|^2 = L_0^2 + (\Delta s)^2 - 2L_0(\Delta s) \cos \alpha, \quad \alpha = \widehat{L_0, \Delta s}. \quad (6.37)$$

Напомним некоторые классические результаты из дифференциальной геометрии [40].

Для пары точек y и y_0 , расположенных рядом на гладкой кривой l^+ (рис. 6.2), существует соприкасающийся круг, радиус которого ρ определяет кривизну кривой в точке y_0 . Тогда геометрия треугольника Oyy_0 определяет угол β следующим образом: $\beta = \pi/2 - \arcsin[(\Delta s/2)/\rho] = \pi/2 - \Delta s/(2\rho) + O[(\Delta s)^3]$. Как следует из рис. 6.2, $\alpha = \pi - \theta - \beta = \pi/2 - \theta + \Delta s/(2\rho)$, так что

$$\cos \alpha = \sin \left(\theta - \frac{\Delta s}{2\rho} + O[(\Delta s)^3] \right) = \sin \theta - \frac{\Delta s}{2\rho} \cos \theta + O((\Delta s)^2). \quad (6.38)$$

Последнее соотношение позволяет выразить расстояние $|x_0 - y|^2$ в формуле (6.37) через Δs :

$$|x_0 - y|^2 = L_0^2 + (\Delta s)^2 + 2L_0(\Delta s) \left(\frac{\Delta s}{2\rho} \cos \theta - \sin \theta \right) + O((\Delta s)^3). \quad (6.39)$$

Интересно заметить, что полученные результаты неявно содержат решение не только для точечного источника падающей волны, но также для плоской падающей волны. Этот случай может быть получен из нашего решения (6.43), если положить $L_0 \gg L$, так что отраженное волновое давление будет равно

$$p^{sc}(x) = \frac{\exp\{i[k(L_0 + L) + (\pi/4)(\delta - 1)]\}}{\sqrt{L_0} \sqrt{|1 + 2L/(\rho \cos \theta)|}}, \quad \delta = \text{sign} \left[1 + \frac{2L}{\rho \cos \theta} \right]. \quad (6.44)$$

Если помимо указанных предположений мы рассмотрим отраженное волновое поле в дальней зоне с $L_0, L \gg \rho$, то выражение (6.43) становится таким:

$$p^{sc}(x) = \frac{\exp\{i[k(L_0 + L) + (\pi/4)(\delta - 1)]\}}{\sqrt{2L_0 L}} \sqrt{|\rho| \cos \theta}, \quad \delta = \text{sign}(\rho). \quad (6.45)$$

Следовательно, амплитуда акустической отраженной плоской волны в дальней зоне пропорциональна квадратному корню из радиуса кривизны.

Примечания

1. Доказанная теорема 1 утверждает, что хорошо известный для плоских отражателей первый закон отражения линейной волновой теории, который гласит, что угол отражения равен углу падения, также справедлив и для произвольной гладкой криволинейной границы.

2. Если существует несколько стационарных точек, т.е. несколько точек зеркального отражения на отражающей границе, тогда итоговый вклад отраженного волнового поля определяется суммой индивидуальных вкладов данных точек (стационарных).

3. Главный асимптотический член для отраженного волнового поля, выведенный в этом разделе, справедлив, только если стационарная точка регулярна, т.е. если выражение в скобках в (6.42) не исчезает и, таким образом, слагаемое с малым приращением второго порядка $(\Delta s)^2$ — ненулевое. В противном случае, когда стационарная точка вырождается и данный множитель равен нулю, выражение в знаменателе исчезает и более детальный анализ показывает, что при этом главный асимптотический член — более высокого порядка при $k \rightarrow \infty$.

4. Возможно, это покажется несколько странным, что знаменатель уравнения (6.43) может в некоторых случаях обращаться в нуль. Заметим, что радиус кривизны ρ в точке отражения должен быть взят с его истинным знаком — положительным для выпуклых отражателей и отрицательным для вогнутых. В случае невыпуклой границы с отрицательной кривизной рассматриваемое выражение может обратиться в нуль. Яркий пример такого рода дается облучением круга радиуса a из точечного источника, расположенного в центре круга, когда точка наблюдения x и источник x_0 находятся в одном месте. В этом случае $L = L_0 = a$, $\rho = -a$, $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$ и, следовательно, $L_0 + L + 2L_0 L / (\rho \cos \theta) = 0$.

5. Результаты этого раздела могут объяснить, почему физическая теория дифракции Кирхгофа дает верный прогноз только для выпуклых отражателей. В самом деле, с точки зрения геометрической теории дифракции, физическая теория дифракции описывает лишь прямое падение приходящей волны. Если граница препятствия выпукла, можно гарантировать, что лишь волна, попадающая в малую окрестность точки $y_0 \in l^+$, является истинной прямой падающей волной. Если же граница не выпуклая, то в дополнение к прямо падающей волне могут существовать также волны, переотраженные от граничных точек и приходящие после переотражений в ту же окрестность точки y_0 .

6. Формула (6.43) допускает простую проверку в случае плоской отражающей границы. Если волна, излучаемая из точки x_0 и описываемая формулой (6.34), распространяется в пространстве, а затем встречает любую плоскую отражающую акустически твердую поверхность, то естественно предположить, что амплитуда данной волны ведет себя так же, как и в случае отсутствия отражателя, а амплитуда переотраженной волны зависит лишь от полного пути акустического луча. Таким образом, из эвристических соображений можно предсказать, что решение в данном случае должно иметь форму

$$p(x) = \frac{e^{ik(L_0+L)}}{\sqrt{L_0+L}} \quad (6.46)$$

(сравните с формулой для излученного давления (6.34)). Данный результат следует напрямую из формулы (6.43), потому что в случае плоского отражателя $\rho = \infty$, $\delta = \text{sign}(L_0 + L) = 1$.

7. Необходимо заметить, что полученные результаты могут быть в принципе получены в рамках подхода Келлера в геометрической теории дифракции [8, 96, 103]. Тем не менее с ростом числа переотражений становится слишком сложно проследить полную траекторию акустических лучей. Кажется, что предложенный здесь подход напрямую приводит к окончательным результатам достаточно ясным методом.

6.4. Высокочастотная дифракция с переотражениями

Рассмотрим повторное (двойное) отражение от акустически твердой границы (рис. 6.3).

Скалярная акустическая волна излучается из точечного источника x_0 и далее принимается в точке x после переотражения от дуг l_1^+ и l_2^+ . Следуя интегральной формуле Кирхгофа–Гельмгольца, принятое отраженное давление определяется выражением

$$p^{\text{sc}}(x) = \int_{l_2^+} p(y_2) \frac{\partial \Phi(kr)}{\partial n_2} dl_2, \quad r = |x - y_2|, \quad (6.47)$$

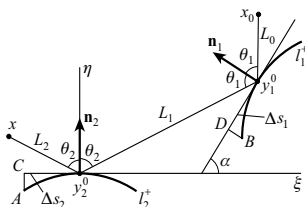


Рис. 6.3. Повторный луч отражения от препятствия с абсолютной границей

где $p(y_2)$ — значение акустического давления на дуге l_2^+ . Для высоких частот, согласно физической теории дифракции, $p(y_2) = 2p_2^{\text{inc}}(y_2)$, где $p_2^{\text{inc}}(y_2)$ — волна, падающая на точки $y_2 \in l_2^+$ контура l_2^+ , после того как произошло первое отражение на контуре l_1^+ . Она снова определяется интегральной формулой Кирхгофа–Гельмгольца:

$$p_2^{\text{inc}}(y_2) = \int_{l_1^+} p(y_1) \frac{\partial \Phi(kr_1)}{\partial n_1} dl_1, \quad r_1 = |y_2 - y_1|, \quad y_2 \in l_2^+, \quad (6.48)$$

где $p(y_1)$ — значение акустического давления на контуре l_1^+ . Согласно физической теории дифракции, $p(y_1) = 2p_1^{\text{inc}}(y_1)$, где $p_1^{\text{inc}}(y_1)$ — волновое поле, падающее на контур l_1^+ . Принимая во внимание, что $p_1^{\text{inc}}(y_1)$ для высоких частот снова выражается формулой

$$p_1^{\text{inc}}(y_1) = \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{r_0}}, \quad k \rightarrow \infty, \quad r_0 = |x_0 - y_1|, \quad (6.49)$$

и собирая вместе формулы (6.47)–(6.49), можем выписать следующее основное представление, справедливое при $k \rightarrow \infty$:

$$p^{\text{sc}}(x) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{l_1^+} \int_{l_2^+} \frac{\cos(n_1, r_1) \cos(n_2, r)}{\sqrt{r_0 r_1 r}} e^{ikS(y_1, y_2)} dl_1 dl_2, \quad (6.50)$$

$$S(y_1, y_2) = r_0 + r_1 + r = |x_0 - y_1| + |y_2 - y_1| + |x - y_2|.$$

Теорема. Любая пара точек $y_1^0 \in l_1^+$ и $y_2^0 \in l_2^+$ с равными углами $\widehat{n_1, r_0} = \widehat{n_1, r_0} = \theta_1$ и $\widehat{n_2, r_1} = \widehat{n_2, r_1} = \theta_2$ обеспечивает стационарное значение фазовой функции $S(y_1, y_2)$.

Доказательство. Пусть существует подобная пара и для данных значений $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$ величины, входящие в фазовую функцию, принимают значения $r_0 = L_0$, $r_1 = L_1$, $r = L_2$, $S(y_1, y_2) = L_0 + L_1 + L_2$. Рассмотрим текущую точку $A = y_1 \in l_1^+$ из малой окрестности точки y_1^0 и аналогичную точку $B = y_2 \in l_2^+$ из малой окрестности точки y_2^0 . По аналогии с процедурой вывода, использованной в предыдущем

разделе, можно получить

$$\begin{aligned}|x_0 - y_1| &= L_0 + \Delta s_1 \sin \theta_1 + \frac{(\Delta s_1)^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \theta_1}{L_0} + \frac{\cos \theta_1}{\rho_1} \right) + O((\Delta s_1)^3), \\ |x - y_2| &= L_2 - \Delta s_2 \sin \theta_2 + \frac{(\Delta s_2)^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \theta_2}{L_2} + \frac{\cos \theta_2}{\rho_2} \right) + O((\Delta s_2)^3).\end{aligned}\quad (6.51)$$

Основная проблема состоит в вычислении третьего расстояния $|y_1 - y_2|$. Введем прямоугольную систему координат (ξ, η) с основанием, выбранным в точке y_2^0 . Как следует из рис. 6.3 и анализа в разделе 6.3,

$$\begin{aligned}AC &= \Delta s_2 \sin(\pi/2 - \beta)[1 + O(\Delta s_2)] = \\ &= \Delta s_2 \sin \left[\arcsin \left(\frac{\Delta s_2}{2\rho_2} \right) \right] [1 + O(\Delta s_2)] = \\ &= \frac{(\Delta s_2)^2}{2\rho_2} + O((\Delta s_2)^3), \\ BD &= \frac{(\Delta s_1)^2}{2\rho_1} + O((\Delta s_1)^3)\end{aligned}\quad (6.52)$$

(ср. с рис. 6.2). Тогда во введенной декартовой системе координат (ξ, η) координаты рассматриваемых точек могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi_A &= -\Delta s_2, \quad \eta_A = -AC = -\frac{(\Delta s_2)^2}{2\rho_2} + O((\Delta s_2)^3), \\ \xi_1^0 &= L_1 \sin \theta_2, \quad \eta_1^0 = L_1 \cos \theta_2, \\ \xi_B &= \xi_1^0 - \Delta s_1 \cos \alpha + BD \sin \alpha = \\ &= \xi_1^0 - \Delta s_1 \cos \alpha + \frac{(\Delta s_1)^2}{2\rho_1} \sin \alpha + O((\Delta s_1)^3), \\ \eta_B &= \eta_1^0 - \Delta s_1 \sin \alpha - BD \cos \alpha = \\ &= \eta_1^0 - \Delta s_1 \sin \alpha - \frac{(\Delta s_1)^2}{2\rho_1} \cos \alpha + O((\Delta s_1)^3).\end{aligned}\quad (6.53)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|y_1 - y_2| &= \left[(\xi_B - \xi_A)^2 + (\eta_B - \eta_A)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left\{ \left[\xi_1^0 - \Delta s_1 \cos \alpha + \frac{(\Delta s_1)^2}{2\rho_1} \sin \alpha + \Delta s_2 \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\eta_1^0 - \Delta s_1 \sin \alpha - \frac{(\Delta s_1)^2}{2\rho_1} \cos \alpha + \frac{(\Delta s_2)^2}{2\rho_2} \right]^2 \right\}^{1/2} + O((\Delta s)^3), \\ (\Delta s)^2 &= \min \{ (\Delta s_1)^2, (\Delta s_2)^2, \Delta s_1 \Delta s_2 \}.\end{aligned}\quad (6.54)$$

Возводя здесь все скобки в квадрат и оставляя все степени только до второй включительно, получаем

$$|y_1 - y_2| = \left[L_1^2 - 2\Delta s_1 (\xi_1^0 \cos \alpha + \eta_1^0 \sin \alpha) + (\Delta s_1)^2 + (\Delta s_2)^2 - \right. \\ \left. - 2\Delta s_1 \Delta s_2 \cos \alpha + \frac{(\Delta s_1)^2}{\rho_1} (\xi_1^0 \sin \alpha - \eta_1^0 \cos \alpha) + \right. \\ \left. + 2\xi_1^0 \Delta s_2 + \eta_1^0 \frac{(\Delta s_2)^2}{\rho_2} \right]^{1/2} + O((\Delta s)^3). \quad (6.55)$$

Заметим, что $\alpha = \pi - \theta_1 - \theta_2$, следовательно,

$$\begin{aligned} \xi_1^0 \cos \alpha + \eta_1^0 \sin \alpha &= L_1 \sin(\alpha + \theta_2) = L_1 \sin \theta_1, \\ \xi_1^0 \sin \alpha - \eta_1^0 \cos \alpha &= -L_1 \cos(\alpha + \theta_2) = L_1 \cos \theta_1, \\ \cos \alpha &= -\cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (6.56)$$

В результате выражение (6.55) можно переписать следующим образом:

$$|y_1 - y_2| = |AB| = \\ = L_1 \left[1 - 2\frac{\Delta s_1}{L_1} \sin \theta_1 + 2\frac{\Delta s_2}{L_1} \sin \theta_2 + \frac{(\Delta s_1)^2}{L_1^2} \left(1 + \frac{L_1}{\rho_1} \cos \theta_1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{(\Delta s_2)^2}{L_1^2} \left(1 + \frac{L_1}{\rho_2} \cos \theta_2 \right) + 2\frac{\Delta s_1 \Delta s_2}{L_1^2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^{1/2} + \\ + O((\Delta s)^3). \quad (6.57)$$

Теперь разложение данного квадратного корня в ряд Тейлора по степеням малых величин Δs_1 и Δs_2 приводит к представлению

$$\begin{aligned} \frac{|y_1 - y_2|}{L_1} &= 1 - \frac{\Delta s_1}{L_1} \sin \theta_1 + \frac{\Delta s_2}{L_1} \sin \theta_2 + \frac{(\Delta s_1)^2}{2L_1^2} \left(1 + \frac{L_1}{\rho_1} \cos \theta_1 - \sin^2 \theta_1 \right) + \\ &+ \frac{(\Delta s_2)^2}{2L_1^2} \left(1 + \frac{L_1}{\rho_2} \cos \theta_2 - \sin^2 \theta_2 \right) + \\ &+ \frac{\Delta s_1 \Delta s_2}{L_1^2} [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2] + O((\Delta s)^3). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Далее, собирая вместе все результаты (6.51) и (6.58), можем заключить, что фазовая функция $S(y_1, y_2)$ в уравнении (6.50) — это

$$\begin{aligned} S(y_1, y_2) &= L_0 + L_1 + L_2 + \frac{(\Delta s_1)^2}{2} \cos^2 \theta_1 \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \frac{2}{\rho_1 \cos \theta_1} \right) + \\ &+ \frac{(\Delta s_2)^2}{2} \cos^2 \theta_2 \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1} + \frac{2}{\rho_2 \cos \theta_2} \right) + \frac{\Delta s_1 \Delta s_2}{L_1} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ &+ O((\Delta s)^3). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Данное выражение не содержит линейных слагаемых Δs_1 и Δs_2 , что и доказывает теорему.

Из результатов данной теоремы с помощью двумерного метода стационарной фазы (см. раздел 1.4) можно вывести главный асимптотический член для амплитуды дважды переотраженного акустического луча. Исходя из выражений для производных второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S}{\partial(\Delta s_1)^2} &= \cos^2 \theta_1 \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \frac{2}{\rho_1 \cos \theta_1} \right), \\ \frac{\partial^2 S}{\partial(\Delta s_2)^2} &= \cos^2 \theta_2 \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1} + \frac{2}{\rho_2 \cos \theta_2} \right), \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \Delta s_1 \partial \Delta s_2} &= \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{L_1}\end{aligned}\quad (6.60)$$

и согласно этому методу искомое давление имеет следующую форму:

$$p(x) = \frac{\exp\{i[k(L_0 + L_1 + L_2) + (\pi/4)(\delta_2 - 2)]\}}{\sqrt{L_0 L_1 L_2} \sqrt{|\det(D_2)|}}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.61)$$

Здесь D_2 — определитель Гессе (перед всеми его элементами опущен некоторый множитель)

$$D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \frac{2}{\rho_1 \cos \theta_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1} + \frac{2}{\rho_2 \cos \theta_2} \end{pmatrix} \quad (6.62)$$

и $\delta_2 = \text{sign}(D_2) = \nu_+(D_2) - \nu_-(D_2)$ — разность между количеством положительных и отрицательных собственных значений матрицы D_2 .

Рассмотрим общий случай, когда число отражений произвольно и равно N . Пусть акустическая волна излучается из точки x_0 , затем последовательно переотражается N раз от точек y_m^0 , $y_m^0 \in l_m^+$, $m = 1, \dots, N$, и в итоге принимается в точке приема x . Все отражающие точки расположены таким образом, что углы падения и отражения в точках отражения y_m^0 равны друг другу и равны θ_m . Обозначим расстояние между последовательными точками отражения через $L_m = |y_{m+1}^0 - y_m^0|$, $m = 1, \dots, N-1$. Кроме того, обозначим расстояние между источником x_0 и первой точкой отражения y_1^0 через $L_0 = |y_1^0 - x_0|$ и расстояние между приемником x и последней точкой отражения y_N^0 через $L_N = |x - y_N^0|$.

Из предыдущих соображений следует, что главный асимптотический член для амплитуды N раз переотраженной акустической волны может быть построен при помощи высокочастотной оценки кратного

интеграла

$$p(x) \sim e^{-(\pi/4)Ni} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{N/2} \frac{\prod_{m=1}^N \cos \theta_m}{\sqrt{\prod_{m=0}^N L_m}} \int_{l_1^+} \dots \int_{l_N^+} e^{ikS} dl_1 \dots dl_N, \quad (6.63)$$

$$S = S(y_1, \dots, y_N) = |y_1 - x_0| + \sum_{m=1}^{N-1} |y_{m+1} - y_m| + |x - y_N|.$$

По аналогии со случаем, рассмотренным выше при $N = 2$, можем заключить, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial (\Delta s_m)^2} &= \cos^2 \theta_m \left(\frac{1}{L_{m-1}} + \frac{1}{L_m} + \frac{2}{\rho_m \cos \theta_m} \right), \quad m = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \Delta s_m \partial \Delta s_{m+1}} &= \frac{\cos \theta_m \cos \theta_{m+1}}{L_m}, \quad m = 1, \dots, N-1, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \Delta s_m \partial \Delta s_n} &= 0, \quad n \neq m, \quad n \neq m+1. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Тогда многомерный метод стационарной фазы (раздел 1.4) приводит к точной формуле для (геометро-оптического) главного асимптотического члена

$$p(x) = \frac{\exp \left\{ i \left[k \sum_{m=0}^N L_m + \frac{\pi}{4} (\delta_N - N) \right] \right\}}{\sqrt{\left(\prod_{m=0}^N L_m \right) |\det(D_N)|}}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (6.65)$$

где

$$\begin{aligned} D_N &= d_{nm} \quad (n, m = 1, \dots, N), \\ d_{mm} &= \frac{1}{L_{m-1}} + \frac{1}{L_m} + \frac{2}{\rho_m \cos \theta_m} \quad (m = 1, \dots, N), \\ d_{m+1, m} &= d_{m, m+1} = \frac{1}{L_m} \quad (m = 1, \dots, N-1), \\ d_{nm} &= 0 \quad (n \neq \{m, m+1, m-1\}), \quad \delta_N = \text{sign}(D_N). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Примечания

1. Как и в случае однократного отражения, особые случаи могут возникнуть также и в (6.65). Это бывает каждый раз, когда знаменатель равен нулю, $\det(D_N) = 0$. В подобных случаях главный асимптотический член ведет себя качественно иначе и его зависимость от частотного параметра k совсем иная.

2. Вспомним, что в настоящей главе мы изучаем только случай акустически твердой границы. Можно легко доказать, что в случае, когда все линии отражения акустически мягкие, общая формула (6.65) должна быть умножена на $(-1)^N$. Эвристически это напрямую следует из очевидного наблюдения, что при каждом отражении фаза меняет свое значение скачком на 180° .

3. Важно выделить случай, когда $\delta_N = \text{sign}(D_N)$ может быть вычислена простым способом. Предположим, что все $\rho_m > 0$, $m = 1, \dots, N$, т. е. все отражающие кривые выпуклы. В данном случае матрица D_N может быть представлена как сумма двух положительно определенных матриц (см. формулировку в [90] и раздел 4.1, основные результаты которого могут быть применены также к случаю конечномерного пространства):

$$\begin{aligned} D_N &= A_N + B_N, \quad A_N = (a_{nm}), \quad B_N = (b_{nm}), \\ a_{mm} &= \frac{1}{L_{m-1}} + \frac{1}{L_m} \quad (m = 1, \dots, N), \\ a_{m+1,m} &= a_{m,m+1} = \frac{1}{L_m} \quad (m = 1, \dots, N-1), \\ a_{nm} &= 0 \quad (n \neq \{m, m+1, m-1\}), \\ b_{mm} &= \frac{2}{\rho_m \cos \theta_m} \quad (m = 1, \dots, N), \quad b_{nm} = 0 \quad (n \neq m). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Положительная определенность матрицы B_N очевидна, так как она имеет диагональную структуру со всеми положительными слагаемыми. Докажем, что матрица A_N также является положительно определенной.

Прежде всего докажем по индукции, что

$$I_N = \det(A_N) = \frac{\sum_{m=0}^N L_m}{\prod_{m=0}^N L_m}. \quad (6.68)$$

Имеем для $N = 1$: $I_1 = \det(A_1) = 1/L_0 + 1/L_1 = (L_0 + L_1)/(L_0 L_1)$, поэтому в данном случае справедливость формулы (6.68) несомненна. Для $N = 2$ имеем

$$\begin{aligned} I_2 = \det(A_2) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{L_0 L_1} + \frac{1}{L_0 L_2} + \frac{1}{L_1 L_2} = \\ &= \frac{L_0 + L_1 + L_2}{L_0 L_1 L_2}, \end{aligned} \quad (6.69)$$

что снова совпадает с формулой (6.68). Для произвольного $N > 2$ представим доказательство по индукции.

Предположим, что равенство (6.68) выполняется для всех $M < N$, и рассмотрим I_N , $N > 2$. Тогда, раскладывая этот определитель по элементам первого столбца, получим

$$\begin{aligned}
 I_N &= \left(\frac{1}{L_{N-1}} + \frac{1}{L_N} \right) I_{N-1} - \frac{1}{L_{N-1}^2} I_{N-2} = \\
 &= \left(\frac{1}{L_{N-1}} + \frac{1}{L_N} \right) \frac{\sum_{m=0}^{N-1} L_m}{\prod_{m=0}^{N-1} L_m} - \frac{1}{L_{N-1}^2} \frac{\sum_{m=0}^{N-2} L_m}{\prod_{m=0}^{N-2} L_m} = \\
 &= \frac{(1/L_{N-1} + 1/L_N) \sum_{m=0}^{N-1} L_m - (1/L_{N-1}) \sum_{m=0}^{N-2} L_m}{\prod_{m=0}^{N-1} L_m} = \\
 &= \frac{1 + (1/L_N) \sum_{m=0}^{N-1} L_m}{\prod_{m=0}^{N-1} L_m} = \frac{\sum_{m=0}^N L_m}{\prod_{m=0}^N L_m}. \quad (6.70)
 \end{aligned}$$

Теперь, когда соотношение (6.68) строго доказано, покажем, что матрица A_N положительно определена, используя хорошо известный критерий Сильвестра [90]. В нем утверждается, что любая симметричная матрица положительно определена, если все ее главные определители (т.е. те, которые образованы отбрасыванием равного числа последних строк и столбцов) положительны. Для рассматриваемой матрицы A_N ее главные подматрицы совпадают с той же A_M меньших размерностей $M = 1, \dots, N$. Теперь ясно, что, так как все главные определители матрицы A_N положительны, эта матрица положительно определена в силу критерия Сильвестра.

Далее, так как сумма положительно определенных матриц снова всегда положительно определена, можно заключить, что $D_N = A_N + B_N$ положительно определена, так что $\nu_-(D_N) = 0$, $\nu_+(D_N) = N$ и, следовательно, в (6.65) $\delta_N = \text{sign}(D_N) = \nu_+(D_N) - \nu_-(D_N) = N$.

4. Следует отметить, что матрица A_N относится к задаче со всеми $\rho_m = \infty$, $m = 1, \dots, N$, т.е. к случаю, когда отражатель — локально плоское зеркало. Для подобной системы плоских отражателей, подставляя тождество (6.68) в (6.65) с $D_N = A_N$, $\delta_N = N$, приходим к следующему выражению для амплитуды N раз переотраженной акустической

волны:

$$p(x) = \exp \left(ik \sum_{m=0}^N L_m \right) / \sqrt{\sum_{m=0}^N L_m}, \quad (6.71)$$

которое вполне согласуется с ясными оптическими идеями о том, что наличие плоских отражателей не изменяет значение амплитуды.

6.5. Примеры высокочастотного многократного отражения

В качестве первого примера применения изложенной теории рассмотрим обратное симметричное отражение в дальней зоне от пары одинаковых акустически мягких кругов радиуса R с расстоянием между их центрами $3R$ (рис. 6.4). Существуют два луча обычного отражения с $N=1$ в точках A и B и два луча с $N=2$ ($CDEF$ и в обратном направлении). Так как $\rho_n = R > 0$, $\sigma_N = N$, $N=1, 2$, то коэффициент полного отражения, предсказываемый лучевой теорией:

$$p = -\sqrt{\pi k R} + \sqrt{2\pi k} - \frac{\exp \left[\left(5 - 2\sqrt{2} \right) k R i \right]}{\sqrt{L_1 \left[\left(1/L_1 + 2\sqrt{2}/R \right)^2 - 1/L_1^2 \right]}}, \quad (6.72)$$

где

$$L_1 = |DE| = (3 - \sqrt{2}) R.$$

Здесь и во всех дальнейших примерах отраженное давление берется в таком масштабе, что коэффициент обратно-рассеянного отражения диском радиуса R в дальней зоне равен $\sqrt{\pi k R}/2$. На рис. 6.4 показана зависимость отраженного давления от параметра R/λ ($\lambda = 2\pi/k$ — длина волны). Точное численное решение построено при помощи техники граничных интегральных уравнений. Для последующих примеров граница препятствия была выбрана акустически мягкой.

6.5.1. Симметричное отражение от полукруга. Задача обратного симметричного отражения в дальней зоне от вогнутой стороны полукруга весьма интересна, важна и нетривиальна, так что она рассматривается отдельно. На рис. 6.5 видно, что для каждого $N > 1$ существует два луча (такие как $ABCDE$ и обратный), для которых $L_0 = L_N = L/2 + \infty$, $L_n = L = 2R \cos \theta_N$, $n = 1, \dots, N-1$, $\rho_n = -R$, $\theta_N = \frac{1}{2}\pi(N-1)/N$. Для $N=1$ существует только луч прямого зеркального отражения. Следовательно, в формуле (6.65) $\det(D_N) = L^{-N} \det(G_N)$, а элементы матрицы G_N равны $g_{11} = g_{NN} = -3$, $g_{nn} = -2$, $n = 2, \dots, N-1$, $g_{n+1,n} = g_{n,n+1} = 1$, $n = 1, \dots, N-1$, остальные $g_{nm} = 0$. Можно доказать по индукции, что $\det(G_N) = (-1)^N 4N$. Наиболее сложный вопрос — определение значения δ_N . Расположение

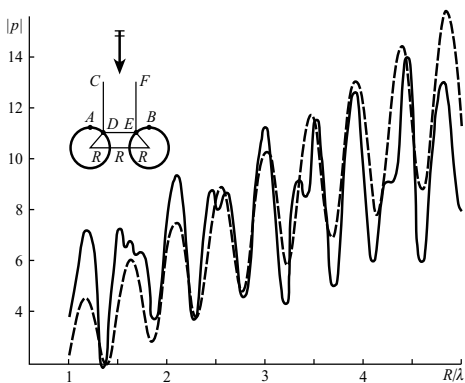


Рис. 6.4. Отражение от пары акустически мягких дисков. Сплошная кривая представляет точное решение, штриховая — лучевое решение

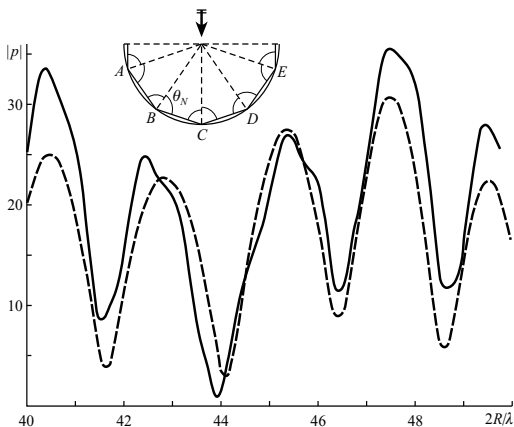


Рис. 6.5. Симметричное отражение от акустически мягкого полу круга. Сплошная кривая представляет точное решение, штриховая — лучевое решение

собственных значений матрицы G_N может быть получено с использованием известного результата о кругах Гершгорина [90]. Он доказывает, что весь набор собственных значений лежит в комплексной плоскости внутри единичных дисков

$$|z - g_{nn}| < \sum_{m \neq n} |g_{nm}|, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (6.73)$$

В рассматриваемой задаче данный набор совпадает с парой дисков

$$|z + 3| \leq 1, \quad |z + 2| \leq 2 \quad (6.74)$$

и их объединение расположено в левой комплексной полуплоскости. Отсюда, каждое вещественное собственное значение эрмитовой матрицы G_N (так же как и D_N) отрицательно. Таким образом, $\delta_N = v_+ - v_- = -N$. Теперь можно легко выписать точный результат для коэффициента отражения (для мягкого препятствия)

$$p = \sqrt{\frac{\pi k}{8}} \sum_{N=1}^{\infty} i^N \varepsilon_N \sqrt{\frac{L_N}{N}} e^{ikNL_N}, \quad (6.75)$$

$$L_N = 2R \sin(\pi/2N), \quad \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_N = 2, \quad \text{если } N \geq 2.$$

Сходимость ряда (6.75) очень медленная, что подтверждается численной реализацией. Для получения первых трех истинных знаков в p необходимо взять несколько сотен членов в (6.75). На рис. 6.5 сравниваются построенное и точное решения для полукруга при возрастании диаметра от 40λ до 50λ .

6.5.2. Случай неизолированной стационарной точки. В предыдущем анализе мы исходили из предположения, что при вычислении интеграла (6.63) стационарная точка его фазы изолирована. Тем не менее для ряда важных задач это предположение неверно. Наиболее яркий пример задачи подобного рода — симметричное отражение от параболы (рис. 6.6, а).

Хорошо известно, что каждый луч, параллельный оси параболы, отразившись от нее, проходит через фокус. Следовательно, можно ожидать, что главный член асимптотического разложения для отраженного давления содержит более высокие степени k и основной результат (6.65) здесь нарушается. Рассмотрение луча однократного отражения от точки O тривиально. Рассмотрим случай $N = 2$. Для большей конкретности возьмем параболу, имеющую конечный размер: $y^2 = 2px$, $0 \leq x \leq p$. Тогда двукратное отражение возможно только от двух одинаковых конечных частей l верхней и нижней половин параболы, причем обе дуги l отделены конечным расстоянием от начала координат O . Таким образом, двойное переотражение от верхней на

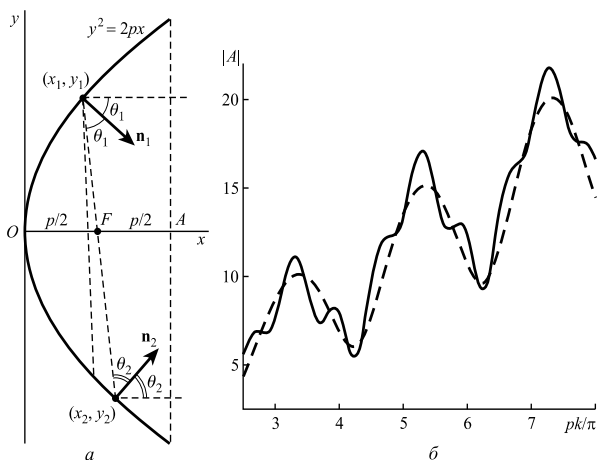


Рис. 6.6. Симметричное отражение от акустически мягкого параболического отражателя

нижнюю дугу l определяется следующим выражением для отраженной амплитуды (см. (6.50)):

$$A = -i \frac{k}{2\pi} \int_l \int_l e^{ik\varphi} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sqrt{L_1}} ds_1 ds_2, \quad (6.76)$$

где фаза φ отсчитывается от точки A и равна $\varphi = (p - x_1) + (p - x_2) + L_1$. Принимая во внимание, что $ds_1 = dy_1 / \cos \theta_1$, $ds_2 = dy_2 / \cos \theta_2$, выражение (6.76) можно переписать в виде

$$A = -\frac{ik}{2\pi} \sqrt{2p} \int_l \int_l e^{ik\varphi} \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 2p^2}}, \quad (6.77)$$

так как функция L_1 имеет «медленную» производную под квадратным корнем и определяется отрезком, пересекающим фокус F , что приводит к $L_1 = (x_1 + p/2) + (x_2 + p/2) = p + (y_1^2 + y_2^2)/2p$. Здесь использовано свойство параболической кривой, согласно которому расстояние между ее текущей точкой (x, y) и фокусом F равно расстоянию между этой точкой и директрисой, т. е. равно $x + p/2$. Точное значение для

фазы

$$\varphi = \left(p - \frac{y_1^2}{2p}\right) + \left(p - \frac{y_2^2}{2p}\right) + \sqrt{\left(\frac{y_1^2 - y_2^2}{2p}\right) + (y_1 - y_2)^2}. \quad (6.78)$$

Таким образом, коэффициент отраженного давления приобретает вид

$$A = -\frac{ik}{\pi} \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{\varepsilon}^{p, p/2} \int_{-p, p/2}^{-\varepsilon} e^{ik\varphi} \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 2p^2}}, \quad \varepsilon > 0, \quad (6.79)$$

$$2p\varphi = 4p^2 - y_1^2 - y_2^2 + \sqrt{(y_1 + y_2)^2 + 4p^2} (y_1 - y_2). \quad (6.80)$$

Можно показать, что каждая пара y_1, y_2 , для которой $y_1, y_2 = -p^2$, дает стационарное значение φ , что доказывает неизолированность стационарной точки. Для оценки асимптотического поведения интеграла (6.79) введем новые переменные

$$z_1 = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 + 4p^2} - (y_1 - y_2), \quad z_2 = y_1 + y_2, \quad (6.81)$$

с якобианом $J \equiv -1/2$. Тогда

$$4p\varphi = 12p^2 - z_1^2. \quad (6.82)$$

Детальный анализ приводит к выводу, что двумерная область интегрирования в (6.79) такова, что

$$A = -\frac{ik}{\pi} \sqrt{\frac{p}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) 2e^{3kpi} \int_0^{p, p/2} dz_2 \int_{a(z_2)}^{b(z_2)} \frac{e^{-ikz_1^2/4p} dz_1}{\sqrt{\left(\sqrt{p^2 + z_2^2} - z_1/2\right)^2 + z_1^2/4}}, \quad (6.83)$$

$$a(z_2) = z_2 - 2\sqrt{2} p + \sqrt{z_2^2 + 4p^2}, \quad b(z_2) = -z_2 - 2\varepsilon + \sqrt{z_2^2 + 4p^2}. \quad (6.84)$$

Значение $z_1 = 0$ с любой z_2 стационарно, и это еще раз подтверждает, что стационарная точка не изолирована. Прежде всего, внутренний интеграл должен быть оценен отдельно. Для этой цели может быть применен одномерный метод стационарной фазы. Априори можно ожидать, что данное стационарное значение $z_1 = 0$ существует не для произвольного z_2 , а лишь при $0 < z_2 < p\sqrt{2}$. Значит, дуги l , указанные выше, расположены в интервале $p/4 < x_1, x_2 < p/2$. Оценка интеграла в (6.83) дает

$$\int e^{-ikz_1^2/4p} \frac{dz_1}{\sqrt{\left(\sqrt{4p^2 + z_2^2} - z_1/2\right)^2 + z_1^2/4}} \sim 2\sqrt{\frac{\pi p}{k}} \frac{e^{-(\pi/4)i}}{\sqrt{4p^2 + z_2^2}}. \quad (6.85)$$

Следовательно,

$$A = -\sqrt{\frac{2k}{\pi}} p e^{(\pi/4)i} e^{3kpi} \int_0^{p, p/2} \frac{dz_2}{\sqrt{z_2^2 + 4p^2}} = -\sqrt{\frac{k}{2\pi}} p (\ln 2) e^{(3kp + \pi/4)i}. \quad (6.86)$$

Для того чтобы выписать окончательный результат, необходимо вспомнить вклад луча с $N = 1$. Кроме того, выражение (6.86) надо учесть дважды, так как для каждого рассмотренного выше луча существует обратный луч. Принимая во внимание выбранный масштаб, итоговый результат можно представить в форме

$$A = -kp (\ln 2) e^{i(3kp + \pi/4)} + i \left(\frac{\sqrt{\pi kp}}{2} \right) e^{2kpi}. \quad (6.87)$$

Необходимо заметить, что первая степень k впервые встречается в данной работе (сравним, например, с (6.75)). Таким образом, параболический отражатель — наиболее мощный из всех известных.

Сопоставление точного решения и решения (6.87) показано на рис. 6.6, б. Главный член (порядка $O(kp)$) в (6.87) дал бы прямую на рисунке, которая проходила бы через средние значения осциллирующего графика.

Примечание. Любопытно, что две очень схожие геометрии, представленные соответственно на рис. 6.5 и 6.6, приводят к совершенно разным амплитудам отраженных волн. В случае полукруга амплитуда квазипостоянна и вычисление данной величины требует суммирования медленно сходящегося ряда. В случае параболического рефлектора отраженная амплитуда растет как первая степень частоты и данная амплитуда выражается очень простой формулой. Указанное различие количественных и качественных отражающих свойств настолько близких по форме отражателей демонстрирует, что высокочастотный анализ должен быть весьма тщательным для корректной оценки отраженной амплитуды.

6.6. Физическая теория дифракции для невыпуклых отражателей

Идеи, рассмотренные в предыдущем разделе, можно применить для того, чтобы распространить физическую теорию дифракции на случай невыпуклых отражателей, где могут возникнуть множественные переломления лучей.

Как мы помним из главы 2, задача дифракции в общем случае может быть полностью изучена и численно решена для произвольной формы отражателя методом граничных интегральных уравнений. Выделим случаи, когда метод ГИУ на высоких частотах в рамках физической теории дифракции может быть сведен к вычислению некоторых

интегралов. Как мы увидим ниже, обычно это кратные интегралы, и по сути данный подход представляет собой обобщение классической теории дифракции (см. раздел 2.6). Для простоты ограничимся лишь скалярной задачей для случая обратного рассеяния, когда точки источника и приемника совпадают друг с другом.

Изучим задачу дифракции для акустически твердого препятствия, граничный контур которого l является произвольным гладким замкнутым контуром конечной длины. Рассмотрим предельно плотный набор лучей, исходящих из источника x_0 , и обозначим через l^+ часть граничного контура l , содержащую точки первого отражения для любого луча. Таким образом, контур l^+ — это освещенная часть l . Как следует из теории Кирхгофа, граничное значение акустического давления исчезает в тени, т. е. вне l^+ : $p(y) = 0$, $y \in l \setminus l^+$. Теперь согласно интегральной формуле Кирхгофа–Гельмгольца (см. раздел 2) амплитуда дифрагированной волны

$$p^{\text{sc}}(x_0) = \int_{l^+} p(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} dl_y, \quad (6.88)$$

и основной вопрос в том, каким образом может быть вычислено значение граничного давления на освещенной части l^+ в (6.88).

Освещенная часть l^+ может содержать как выпуклую, так и невыпуклую зоны. Обозначим опять через l_1^+ и l_2^+ соответственно, выпуклую и невыпуклую части границы на освещенной стороне: $l^+ = l_1^+ \cup l_2^+$. Как показано выше, решение основного ГИУ на l_1^+ вычисляется сходным с классической теорией Кирхгофа образом, потому что никакой переотраженный луч не может достичь данного участка границы:

$$p(y)|_{l_1^+} = 2p_0 = 2 \frac{e^{ik|x_0-y|}}{\sqrt{|x_0-y|}}. \quad (6.89)$$

Если бы рассматриваемый контур l был выпуклым, то это значение (6.89) можно было бы подставить как известное граничное значение акустического давления в интеграл Кирхгофа–Гельмгольца для вычисления волновой амплитуды в любой точке наблюдения. Однако априори вычислить давление в невыпуклых частях l_2^+ границы не так просто, ведь на данных участках происходят кратные переотражения. Наш подход для упрощения вычислений основан на следующем наблюдении. Геометрическая теория дифракции в случае множественных переотражений имеет дело с асимптотическими оценками неких кратных интегралов методом стационарной фазы. Если мы вычислим данные кратные интегралы точно, без применения каких-либо асимптотических оценок, то придем к определенному аналогу физической теории дифракции Кирхгофа для невыпуклых препятствий, допускающих переотражения падающей волны его контурами. Следуя данной идее, необходимо сначала исследовать пути всех уходящих лучей, которые

возвращаются в ту же точку x_0 , с вычислением максимального числа N для любого луча в процессе его переотражений на дуге l_2^+ .

Если $N = 1$, то для каждого луча имеют место лишь простые отражения без переотражений. В этом случае интеграл Кирхгофа–Гельмгольца имеет ту же форму, что и в случае выпуклого препятствия, т. е. это обычный интеграл по освещенной стороне границы, потому что $p(y) = 2p_0$ как на l_1^+ , так и на l_2^+ . То есть везде в зоне света

$$p^{\text{sc}}(x_0) = \int_{l^+} 2p_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} dl_y = -e^{3\pi i/4} \frac{k}{2\pi} \int_{l^+} \frac{e^{2ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} \cos(\widehat{n_y, x_0-y}) dl_y. \quad (6.90)$$

Для $N > 1$ введем характеристическую функцию $\chi(y_1, y_2)$, $y_1, y_2 \in l^+$ в следующей формулировке: $\chi(y_1, y_2) = 1$, если отрезок y_1-y_2 не пересекает контур (т. е. каждая из этих двух точек находится в прямой видимости из второй точки), и $\chi(y_1, y_2) = 0$ в противном случае.

Предположим, например, $N = 2$. Это значит, что каждый луч, излученный из точки x_0 и вернувшийся обратно, не отражается от препятствия границы более чем дважды. Следовательно, перед своим последним отражением, которое на самом деле определяет граничное значение функции $p(y)$ (6.88), каждый луч подвергнется не более чем одному отражению. Таким образом, при вычислении $p(y)$, $y \in l^+$, мы можем добавить к результату прямого отражения $2p_0$ также простой интеграл Кирхгофа–Гельмгольца, который ответственен за влияние однократных повторных отражений:

$$p(y) = 2p_0(y) + \int_{l^+} 2p_0(y_1) \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \chi(y, y_1) dl_1, \quad y \in l^+. \quad (6.91)$$

Здесь учтено, что точка y_1 может влиять на граничное значение $p(y)$ в точке y только в случае, когда последняя видна из y_1 . В результате для $N = 2$ физическая теория дифракции сводится к вычислению двойного интеграла, который получен подстановкой соотношения (6.91) в формулу (6.88).

Ясно, что для произвольного $N \geq 3$ физическая теория дифракции сводится к определенному N -кратному интегралу. Соответствующие формулы здесь опущены ради краткости. Если для некоторого контура величина N известна приближенно из каких-либо соображений априори, то для большей верности можно увеличить ее на несколько единиц. Корректность данного утверждения следует из очевидного соображения: если вклад любой переотраженной волны в граничное значение $p(y)$, $y \in l^+$, отсутствует, то соответствующий кратный интеграл будет асимптотически мал по сравнению с результатом прямого попадания. Тем не менее необходимо отметить, что для $N \geq 3$ эффективность такой обобщенной теории Кирхгофа существенно снижается, так как количество арифметических операций при реализации на компьютере растет как M^N , где M — число узлов в соответствующих квадратур-

ных формулах. В то же время прямое численное решение ГИУ методом коллокаций (см. раздел 1.5) требует порядка M^3 арифметических операций, так как обычно оно сводится к линейной системе $M \times M$ уравнений. (Некоторые полезные, простые и ясные идеи численного решения линейных систем методом Гаусса и программы на Фортране приведены в книге [80].)

Примечание. Как и в геометрической теории дифракции, конечный результат для акустически мягкой границы отличается от результата для акустически твердого препятствия множителем $(-1)^N$, который ставится перед соответствующей формулой для полученного акустического давления $p(x_0)$. Отсюда можно сделать важный физический вывод. Как показано в разделе 2.6, для выпуклых отражателей, когда присутствуют только однократные интегралы с $N = 1$, классическая теория Кирхгофа предсказывает одинаковую вещественную амплитуду акустического давления в отраженной волне для акустически твердой и мягкой границ, так как комплексная амплитуда отличается только противоположными знаками. Напротив, для невыпуклых препятствий с $N > 1$ мы сталкиваемся с суммированием вкладов лучей, отраженных от границы в разное время. При этом вклады лучей с четным N для обоих типов границ равны друг другу, но при нечетном N находятся в противофазе. Следовательно, результаты суммирования подобных вкладов в общем случае различны, а значит, у двух геометрически идентичных объектов, один из которых акустически тверд, другой мягок, даже в предельном коротковолновом режиме могут быть совершенно разные диаграммы обратного рассеяния.

Тем не менее можно указать относительно широкий класс невыпуклых препятствий, для которых переотражения невозможны, и, таким образом, для них можно всегда полагать $N = 1$. Для препятствий подобного рода отражение от акустически твердой и акустически мягкой границ будут одинаковыми в абсолютном значении. В работе [22] доказано, что если на вогнутой дуге границы угол между двумя произвольными нормальями меньше прямого, то на данной части граничного контура луч переотражения наверняка невозможен. Таким образом, можно выделить класс невыпуклых областей со слабовогнутыми границами. Данный класс включает препятствия с границами, для которых на любой вогнутой части угол между произвольной парой нормалей меньше 90° . Для препятствий этого класса физическая теория дифракции включает, как и для выпуклых областей, обычный однократный интеграл Кирхгофа–Гельмгольца.

6.7. Высокочастотная трехмерная теория дифракции

Распространим некоторые результаты предыдущих разделов, полученные для двумерного случая, на трехмерные задачи. Рассмотрим дифракцию высокочастотной (т.е. коротковолновой) акустической волны, сгенерированной точечным источником, на произвольном

акустически твердом препятствии Γ , которая порождает граничное условие $(\partial p / \partial n)_\Gamma = 0$. Как и в предыдущих разделах, наш подход основан на асимптотической оценке дифракционного интеграла Кирхгофа многомерным методом стационарной фазы. Это позволяет получить амплитуду отраженной высокочастотной волны в точной форме. Схожий результат может быть получен при помощи геометрического дифракционного подхода Келлера [96] (более подробное изложение см., например, в книге [103]).

Пусть точечный источник x_0 генерирует сферическую акустическую волну, которая падает на поверхность Γ . В процессе взаимодействия падающей волны с поверхностью Γ на выпуклых частях последней существуют только точки простого зеркального отражения. Процессы отражения от вогнутых частей поверхности более сложны, что связано с возможностью переотражений акустических лучей (сравните с разделом 6.4), и здесь они не рассматриваются. Давление в отраженной волне в высокочастотном пределе определяется направлением падающей волны и малой окрестностью точки зеркального отражения. Следовательно, при больших частотах амплитуда отраженной волны может быть получена многомерным методом стационарной фазы.

Если луч $x_0 - y - x$ отражается от поверхности только один раз, то интегральная формула Кирхгофа–Гельмгольца дает

$$p^{\text{sc}}(x) = \iint_{\Gamma^+} 2p^{\text{inc}}(y) \frac{\partial \Phi(kr)}{\partial n_y} ds_y, \quad (6.92)$$

$$\Phi(kr) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

где мы учли, что главный асимптотический член давления $p(y)$, $y \in \Gamma^+$, согласно физической теории дифракции Кирхгофа, равен $p(y) = 2p^{\text{inc}}(y)$, $y \in \Gamma^+$ (ср. раздел 2.6). Как обычно, здесь $p^{\text{inc}}(y)$ — значение давления в падающей волне на границе поверхности Γ , $\Phi(kr)$ — функция Грина, n_y — внешняя нормаль к поверхности Γ в точке y из малой окрестности точки зеркального отражения y_0 . Заметим, что асимптотически при $k \rightarrow \infty$ можно положить

$$p^{\text{inc}}(y) = \frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \quad r_0 = |x_0 - y|, \quad \frac{\partial \Phi(kr)}{\partial n_y} = ik \cos \gamma \cdot \frac{e^{ikr}}{4\pi r} [1 + O(k^{-1})], \quad (6.93)$$

где $\gamma = \widehat{n_y, r_0}$ — угол между нормалью n_y и направлением распространения падающего луча $r_0 = x_0 - y$.

Так как падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности в точке отражения n_{y_0} , формулы (6.92), (6.93) приводят к следующему основному интегральному представлению (после вынесения неосциллирующих членов за интеграл) в рас-

смаатриваемом коротковолновом приближении:

$$p^{\text{sc}}(x) = \frac{ik \cos \gamma}{4\pi L_0 L} \iint_{\Gamma^+} e^{ikS(y)} ds_y, \quad (6.94)$$

$$S(y) = r_0 + r = |x_0 - y| + |x - y|, \quad L_0 = |x_0 - y_0|, \quad L = |x - y_0|.$$

Теперь главный (дифракционно-геометрический) член асимптотики можно получить применением многомерного метода стационарной фазы [54] к интегралу (6.94).

Процедура оценки должна учитывать все точки y в малой окрестности точки y_0 . Свяжем эту малую окрестность с правой декартовой системой координат, которая определяется нормалью n_{y_0} и двумя линиями главных кривизн поверхности в точке y_0 (рис. 6.7). Тогда произвольная точка y из окрестности y_0 имеет координаты $y = \{\Delta s_1, \Delta s_2, -\frac{1}{2}[k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2]\}$, где $\Delta s_1, \Delta s_2$ — дифференциалы дуг вдоль линий главных кривизн, $k_1 = R_1^{-1}$ и $k_2 = R_2^{-1}$ — две главные кривизны, R_1 и R_2 — радиусы главных кривизн поверхности S в точке y_0 , $[k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2]$ — вторая квадратичная форма поверхности точки y_0 , относительно линий главных кривизн (см., например, [38]).

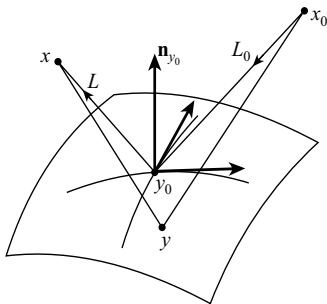


Рис. 6.7. Отражение акустической волны от гладкой поверхности

Применим теорему косинусов к треугольникам $x_0 y_0 y$ и $x y_0 y$ (см. рис. 6.7):

$$\begin{aligned} |x_0 - y|^2 &= L_0^2 + |\Delta s|^2 - 2L_0|\Delta s| \cos(x_0 y_0, y_0 y), \\ |x - y|^2 &= L^2 + |\Delta s|^2 - 2L|\Delta s| \cos(x y_0, y_0 y), \end{aligned} \quad (6.95)$$

где вектор Δs — это $\Delta s = \{\Delta s_1, \Delta s_2, -\frac{1}{2}[k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2]\}$. Обозначим единичный вектор вдоль направления $(y_0 x_0)$ как $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, тогда $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, \cos \gamma\}$ — единичный вектор вдоль

направления $(y_0 x)$. Теперь, скалярно умножив данные векторы на вектор $\Delta \mathbf{s}$, получаем

$$\begin{aligned} |\Delta \mathbf{s}| \cos(x_0 y_0, y_0 y) &= \Delta s_1 \cos \alpha + \Delta s_2 \cos \beta - \\ &\quad - \frac{1}{2} [k_1 (\Delta s_1)^2 + k_2 (\Delta s_2)^2] \cos \gamma, \\ |\Delta \mathbf{s}| \cos(x y_0, y_0 y) &= -\Delta s_1 \cos \alpha - \Delta s_2 \cos \beta - \\ &\quad - \frac{1}{2} [k_1 (\Delta s_1)^2 + k_2 (\Delta s_2)^2] \cos \gamma. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x_0 - y| &= L_0 - \Delta s_1 \cos \alpha - \Delta s_2 \cos \beta + \\ &\quad + \frac{1}{2} (L_0^{-1} \sin^2 \alpha + k_1 \cos \gamma) (\Delta s_1)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} (L_0^{-1} \sin^2 \beta + k_2 \cos \gamma) (\Delta s_2)^2 - \\ &\quad - L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta \Delta s_1 \Delta s_2 + O(|\Delta \mathbf{s}|^3), \\ |x - y| &= L + \Delta s_1 \cos \alpha + \Delta s_2 \cos \beta + \\ &\quad + \frac{1}{2} (L^{-1} \sin^2 \alpha + k_1 \cos \gamma) (\Delta s_1)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} (L^{-1} \sin^2 \beta + k_2 \cos \gamma) (\Delta s_2)^2 - \\ &\quad - L^{-1} \cos \alpha \cos \beta \Delta s_1 \Delta s_2 + O(|\Delta \mathbf{s}|^3). \end{aligned} \quad (6.97)$$

Из этих соотношений можно выделить поведение фазовой функции $S(y)$, определенной в уравнении (6.94), в следующем виде:

$$\begin{aligned} S(y) &= L_0 + L + \frac{1}{2} d_{11} (\Delta s_1)^2 + d_{12} \Delta s_1 \Delta s_2 + \frac{1}{2} d_{22} (\Delta s_2)^2 + O(|\Delta \mathbf{s}|^3), \\ d_{11} &= (L_0^{-1} + L^{-1}) \sin^2 \alpha + 2k_1 \cos \gamma, \\ d_{22} &= (L_0^{-1} + L^{-1}) \sin^2 \beta + 2k_2 \cos \gamma, \\ d_{12} &= - (L_0^{-1} + L^{-1}) \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Здесь отсутствие первых степеней Δs_1 и Δs_2 подтверждает, что точка y_0 отражения зеркально отраженного луча дает стационарное значение для фазовой функции $S(y)$. Таким образом, многократный метод стационарной фазы (см. раздел 1.4) приводит к тому, что главный асимптотический член в интеграле (6.94) определяется коэффициентами перед $(\Delta s_1)^2$, $\Delta s_1 \Delta s_2$, $(\Delta s_2)^2$. В итоге это приводит к выражению

$$p(x) = \frac{\exp \{i [k(L_0 + L) + (\pi/4)(\delta_2 - 2)]\}}{L_0 L \sqrt{|\det(D_2)|}}, \quad (6.99)$$

где D_2 — гессиан симметричной структуры: $D_2 = \{d_{mj}\}$, $d_{mj} = d_{jm}$ ($m, j = 1, 2$), $\delta_2 = \text{sign}(D_2) = \nu_+ - \nu_-$ — разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы D_2 .

Принимая во внимание, что $d_{21} = d_{12}$, окончательный результат можно получить в следующей форме:

$$p(x) = \frac{\exp \{i[k(L_0 + L) + (\pi/4)(\delta_2 - 2)]\}}{|(L_0 + L)^2 + 2L_0L(L_0 + L)(k_2 \sin^2 \alpha + k_1 \sin^2 \beta)(\cos \gamma)^{-1} + 4L_0^2L^2K|^{1/2}}. \quad (6.100)$$

Здесь $K = k_1 k_2$ — гауссова кривизна поверхности в точке y_0 . Заметим также, что вектор $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma\}$ определяет направление падения луча $x_0 y_0$ в выбранной системе координат.

Примечания

1. Безусловно, когда знаменатель в выражении (6.100) обращается в нуль, полученный результат неверен. В таком случае имеем дело с нерегулярной стационарной точкой и зависимость отраженной амплитуды от частоты более сложна.

2. Как и в двумерной задаче, формула (6.100) была выведена для случая, когда высокочастотная волна падает на выпуклую поверхность. Если волна падает на вогнутую поверхность, то главные кривизны k_1 и k_2 отрицательны.

3. Выделим два предельных случая, когда формула (6.100) может быть значительно упрощена. Прежде всего, в случае когда отражающая поверхность локально плоская, имеем $k_1 = k_2 = 0$. Можно легко убедиться в том, что тогда выражение (6.100) представляется в виде

$$p(x) = \frac{e^{ik(L_0 + L)}}{L_0 + L}, \quad (6.101)$$

что согласуется с простыми эвристическими идеями.

Другой простой случай относится к отражению в дальней зоне. В ней $L_0, L \gg R_1, R_2$, поэтому последнее слагаемое в знаменателе преобладает над двумя другими. Тогда формула (6.100) приводится к виду

$$p(x) = \frac{\sqrt{R_1 R_2} \exp \{i[k(L_0 + L) + (\pi/4)(\delta_2 - 2)]\}}{2L_0 L}, \quad (6.102)$$

что совпадает с результатами, приведенными в книге [57]. Как можно видеть, амплитуда рассеянной волны в дальней зоне пропорциональна корню квадратному из величины, обратной к гауссовой кривизне: $p(x) \sim \sqrt{R_1 R_2} \sim 1/\sqrt{K} = 1/\sqrt{k_1 k_2}$.

4. Рассмотренные в этом разделе идеи были обобщены на трехмерные задачи с переотражениями в работах [116, 117].

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КОРОТКОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ

7.1. Основы дифференциальной геометрии выпуклых поверхностей

Настоящая глава будет посвящена в основном обратной задаче реконструкции для выпуклых отражателей. Вначале дадим краткий обзор некоторых классических результатов из дифференциальной геометрии, посвященных концепции *опорной функции* Минковского, которая существенно используется в нашем исследовании.

Рассмотрим гладкую выпуклую замкнутую поверхность S . Введем функцию $P(\mathbf{q})$, связанную с расстоянием $p(\mathbf{q})$ от основания O до касательной плоскости с нормалью \mathbf{q} , следующим образом [39, 40, 68, 110]:

$$\begin{aligned} P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= r p(\alpha_1/r, \alpha_2/r, \alpha_3/r), \\ \mathbf{n} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad r = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $\mathbf{n} = -\mathbf{q}$ — вектор единичной нормали к поверхности. Заметим, что прямоугольные координаты граничной поверхности могут быть выражены через функции $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ как $x_i = \partial P / \partial \alpha_i$.

Сначала рассмотрим функцию $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ как функцию трех переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, каждая из которых изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда в окончательном решении для истинной поверхности необходимо положить $r = 1$.

Введенная функция $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется *опорной функцией* Минковского. Выведем дифференциальное уравнение в частных производных, которое устанавливает связь между опорной функцией и соответствующей гауссовой кривизной.

Функция $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — однородная функция первого порядка относительно своих аргументов:

$$P(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \mu\alpha_3) = \mu P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \mu > 0. \quad (7.2)$$

Согласно теореме Эйлера, для однородной функции P справедливо следующее тождество:

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = P, \quad P_i = \frac{\partial P}{\partial \alpha_i}. \quad (7.3)$$

Касательная плоскость к поверхности может быть выписана в форме

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = P, \quad (7.4)$$

это классический результат аналитической геометрии. Возьмем в уравнении (7.4) частные производные по α_i , $i = 1, 2, 3$. Тогда приходим к декартовым координатам для точек касательной через производные P_i

$$x_i = P_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (7.5)$$

Выразим главные кривизны поверхности в терминах опорной функции, следуя формулам Родрига [38]. На поверхности, вдоль линий кривизны данные формулы принимают вид

$$dx_i + R d\xi_i = 0, \quad (7.6)$$

где R — радиус кривизны поверхности вдоль рассматриваемой кривой. Из (7.5) следует, что

$$dx_i = \sum_{k=1}^3 P_{ik} d\alpha_k, \quad P_{ik} = \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k}. \quad (7.7)$$

Для истинной поверхности, когда $r = 1$, величины α_i становятся координатами единичной нормали ξ_i : $\alpha_i = \xi_i$. Тогда подстановка (7.7) в (7.6) приводит к тождеству

$$\sum_{k=1}^3 P_{ik} d\xi_k + R d\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7.8)$$

При движении вдоль линии кривизны все три $d\xi_i$ не могут исчезнуть одновременно. Следовательно, определитель системы (7.8) должен быть равен нулю: $\det(P_{ik} + \delta_{ik}R) = 0$, $i, k = 1, 2, 3$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Последний определитель равен

$$\begin{aligned} & R^3 + (P_{11} + P_{22} + P_{33}) R^2 + \\ & + (P_{11}P_{22} + P_{11}P_{33} + P_{22}P_{33} - P_{12}^2 - P_{13}^2 - P_{23}^2) R + \det(P_{ik}) = 0 \\ & (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Докажем, что детерминант в (7.9) равен нулю. Для этого применим к уравнению (7.3) дифференцирование по α_i , $i = 1, 2, 3$. В результате придем к однородной системе $\sum_{k=1}^3 P_{ik} \alpha_k = 0$, $i = 1, 2, 3$, где все три α_i не могут быть равны нулю одновременно, так что определитель системы должен быть равен нулю $\det(P_{ik}) = 0$.

Таким образом, уравнение (7.9) — это квадратное уравнение, корни которого R_1 и R_2 являются главными радиусами кривизны, которые согласно теореме Виета удовлетворяют следующим соотношениям:

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} = -(R_1 + R_2), \quad (7.10)$$

$$P_{11} P_{22} + P_{11} P_{33} + P_{22} P_{33} - P_{12}^2 - P_{13}^2 - P_{23}^2 = R_1 R_2 = K^{-1}(\mathbf{q}) \quad (7.11)$$

(здесь K — гауссова кривизна).

Из формул (7.10) и (7.11) ясно, что реконструкция поверхности S через опорную функцию Минковского P возможна в двух случаях: 1) если известна средняя кривизна, т.е. известна функция $R_1 + R_2$; 2) если известна гауссова кривизна K поверхности, т.е. известна функция $R_1 R_2$. Далее в этом разделе мы изучим более подробно первую задачу, называемую задачей Кристоффеля, для которой доказана следующая теорема.

Теорема (Кристоффеля). *Если существует взаимно-однозначное соответствие между гладкой выпуклой замкнутой поверхностью S и единичной сферой, образованной конечными точками внешних единичных нормалей к этой поверхности, при этом все они начинаются из одной фиксированной точки трехмерного пространства, то функция $R_1 + R_2$ определяет поверхность однозначно.*

Доказательство. Построим доказательство, следуя книгам [68] и [39]. Введем сферическую систему координат

$$\begin{cases} \alpha_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \\ \alpha_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \\ \alpha_3 = r \cos \theta. \end{cases} \quad (7.12)$$

Дальнейший вывод основан на некоторых классических результатах о рядах сферических функций (см., например, [53, 88]). Сферические функции $U_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, являются однородными многочленами степени m и простыми решениями уравнения Лапласа $(U_m)_{11} + (U_m)_{22} + (U_m)_{33} = 0$. В сферической системе координат данные функции могут быть выражены в виде

$$U_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r^m P_m^{(j)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \sin(j\varphi) \\ \cos(j\varphi) \end{Bmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (7.13)$$

где $P_m^{(j)}(x) = (1 - x^2)^{j/2} d^j P_m(x)/dx^j$ — присоединенные функции Лежандра, а $P_m(x)$ — многочлены Лежандра.

Доказано, что система сферических функций, рассматриваемых как функции от (θ, φ) , полна и ортогональна на сферической поверхности $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Это предопределяет наиболее естественный и эффективный путь решения рассматриваемой задачи Кристоффеля. Разложим опорную функцию, изначально определенную на единичной

сфере, в ряд по сферическим функциям:

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m U_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (7.14)$$

$$r = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} = 1,$$

где c_m — некоторые неизвестные коэффициенты. Тогда, учитывая, что $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — однородная функция степени 1, а $U_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — однородная функция степени m , можем представить опорную функцию в полном трехмерном пространстве как

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{U_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{r^{m-1}}, \quad (7.15)$$

$$0 < r = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} < \infty.$$

Из данного представления можно вычислить $\Delta P = P_{11} + P_{22} + P_{33}$

$$\Delta P = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left\{ \frac{\Delta U_m}{r^{m-1}} + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{r^{m-1}} \right) \frac{\partial U_m}{\partial \alpha_i} + U_m \Delta \left(\frac{1}{r^{m-1}} \right) \right\}. \quad (7.16)$$

Для того чтобы вычислить эту сумму, вспомним, что $\Delta U_m = 0$ вследствие определения сферических функций. Более того, так как эти функции — однородные степени m , имеем

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{r^{m-1}} \right) \frac{\partial U_m}{\partial \alpha_i} = -\frac{m-1}{r^{m+1}} \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial U_m}{\partial \alpha_i} = -\frac{m-1}{r^{m+1}} m U_m. \quad (7.17)$$

Наконец,

$$\Delta \left(\frac{1}{r^{m-1}} \right) = \frac{(m-1)(m-2)}{r^{m+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta P = - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{(m-1)(m+2)}{r^{m+1}} U_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (7.18)$$

Если применить последнее тождество при $r = 1$ так, чтобы рассматривать уравнение Кристоффеля (7.10) на единичной сфере, то придем к следующему представлению:

$$\Delta P = - \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m-1)(m+2) U_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (7.19)$$

$$r = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} = 1.$$

Вспомним, что набор сферических функций образует полную и ортогональную систему функций. Поэтому можно разложить данную функцию $R_1 + R_2$ как функцию единичной нормали, т.е. как функцию сферических координат (θ, φ) при $r = 1$, в ряд по сферическим

функциям:

$$R_1 + R_2 = \sum_{m=0}^{\infty} d_m U_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (7.20)$$

где коэффициенты d_m предполагаются известными. Тогда уравнение (7.10) дает

$$(m-1)(m+2)c_m = d_m \sim c_m = \frac{d_m}{(m-1)(m+2)}. \quad (7.21)$$

Следовательно, решение задачи Кристоффеля (7.10) будет следующим:

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{(m-1)(m+2)} U_m. \quad (7.22)$$

Можно заметить, что данная формула определяет истинное решение только в случае, если коэффициент при $m=1$ нулевой: $d_1=0$. Вследствие ортогональности сферических функций в соотношении (7.20) это эквивалентно соотношению

$$\int_{r=1} (R_1 + R_2) U_1 d\Omega = 0, \quad (7.23)$$

где $d\Omega$ — элементарный телесный угол. Внося конкретную сферическую функцию U_1 , получим

$$\int_{r=1} (R_1 + R_2) \alpha_i d\Omega = 0 \sim \int_{r=1} (R_1 + R_2) \mathbf{n} d\Omega = 0. \quad (7.24)$$

Последнее условие является необходимым условием для того, чтобы выполнялась теорема Кристоффеля. В книге [39] доказывается, что достаточные условия даются набором из трех соотношений, где необходимое условие — это только одно условие из трех:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{r=1} (R_1 + R_2) \mathbf{n} d\Omega = 0, \\ 2) \quad & (R_1 + R_2) \geq 0, \\ 3) \quad & (R_1 + R_2) - (R_1 + R_2)_{ss} \geq 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Здесь дифференцирование применено относительно длины дуги s произвольного круга единичного радиуса на рассматриваемой сфере.

Примечание. Метод, рассмотренный в настоящем разделе, неприемлем к реконструкции выпуклых форм препятствий из известной диаграммы рассеяния, так как данная задача сводится к задаче Минковского, а не к задаче Кристоффеля. Тем не менее проведенное исследование показывает, что обратная задача для выпуклой трехмерной поверхности как минимум в случае линейной формулировки Кристоффеля может быть эффективно решена с помощью трактовки в сферических координатах.

7.2. Сведение обратной задачи дифракции к задаче Минковского

Как следует из формулы (6.102), амплитуда отраженной волны в дальней зоне в прямой задаче дифракции для выпуклых препятствий выражается в терминах гауссовой кривизны. Следовательно, в практических обратных задачах реконструкции, когда отраженная амплитуда обычно известна для набора рассматриваемых углов, будучи измеренной при этом в дальней зоне, приходим к обратной задаче, которая совпадает с классической *задачей Минковского*, хорошо известной в дифференциальной геометрии (см., например, [39, 40, 68]). Данная задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть S — достаточно гладкая замкнутая выпуклая поверхность с заданной положительной непрерывной гауссовой кривизной $K = K(\mathbf{n})$ как функцией внешней нормали. Необходимо восстановить форму самой поверхности. Здесь мы изучим вопросы существования и единственности. Данная проблема была решена отчасти самим Минковским, далее некоторые важные результаты были получены А. Д. Александровым и А. В. Погореловым. Наше изложение в основном следует работам [39, 40]. Все подходы основаны на приближенном описании данной выпуклой поверхности как выпуклого многогранника.

Сначала выведем необходимое условие для разрешимости задачи Минковского. Начнем с рассмотрения произвольного выпуклого многогранника P_N с N гранями. Пусть \mathbf{n}_i — нормаль к i -й грани, площадь которой S_i . Пусть \mathbf{e} — произвольный фиксированный единичный вектор в пространстве. Переместим многогранник как пространственную фигуру в направлении этого единичного вектора на расстояние ε . Смещение i -й грани влечет за собой изменение объема $S_i(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e})\varepsilon$. Так как полный объем многогранника не изменяется, мы можем заключить, что должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}) S_i = 0. \quad (7.26)$$

Теперь из уравнения (7.26) вследствие произвольности вектора \mathbf{e} следует необходимое условие разрешимости, справедливое для произвольного замкнутого многогранника:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i S_i = \mathbf{0}. \quad (7.27)$$

Далее рассмотрим произвольную гладкую замкнутую выпуклую поверхность S . Можно сформировать последовательность выпуклых многогранников $\{P_N\}$, $N = 1, 2, \dots$, которые сходятся к S . Тогда для любого многогранника P_N верно тождество (7.27), так что в пределе

$N \rightarrow \infty$ приходим к следующим условиям, которые должны быть справедливы для любой замкнутой выпуклой поверхности S :

$$\int_S \mathbf{n} ds(\mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (7.28)$$

Если $K(\mathbf{n})$ обозначает гауссову кривизну поверхности в точке с нормалью \mathbf{n} , то, как известно из дифференциальной геометрии (см., например, [38]), $ds(\mathbf{n}) = d\omega(\mathbf{n})/K(\mathbf{n})$, где $d\omega$ — элементарный телесный угол в направлении \mathbf{n} . Подстановка последнего соотношения в равенство (7.28) приводит к необходимому условию, которому должна удовлетворять данная функция $K(\mathbf{n})$ рассматриваемой обратной задачи, для того чтобы обеспечить разрешимость обратной задачи:

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{n} d\omega(\mathbf{n})}{K(\mathbf{n})} = \mathbf{0}, \quad (7.29)$$

где Ω — полный телесный угол.

Можно поставить естественный вопрос, является ли это условие также достаточным, чтобы гарантировать существование замкнутой выпуклой поверхности, которая определяется этой гауссовой кривизной. В отличие от задачи Кристоффеля задачу Минковского нельзя решить каким-либо конструктивным методом, который допускает аналитическое представление решения. Верный же путь для поиска достаточных условий — опять приближенно представить выпуклую поверхность вписанным многогранником. Следующие результаты были установлены Александровым [60].

Пусть \mathbf{n}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, — система некопланарных единичных векторов и $S_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, — некоторые положительные числа, удовлетворяющие условию (7.27). Тогда существует единственный замкнутый выпуклый многогранник P_N , грани которого имеют внешние нормали \mathbf{n}_i и соответствующие площади S_i . Из этих фундаментальных результатов теории выпуклых многогранников Погорелов [39, 40] доказал теорему, которая утверждает следующее.

Теорема. *Представим, что существует единичная сфера с центром в начале прямоугольной системы координат, и предположим, что непрерывная положительная функция $K(\mathbf{n}) > 0$ определена в любой точке сферы с единичной нормалью \mathbf{n} . Пусть выполняется условие (7.29), где интеграл берется по данной сфере. Тогда существует единственная замкнутая выпуклая поверхность S , которая для каждой точки поверхности с внешней нормалью \mathbf{n} имеет гауссову кривизну $K(\mathbf{n})$.*

Результаты этого раздела позволяют в принципе однозначно восстанавливать форму выпуклого замкнутого препятствия из данных по амплитуде волны, рассеянной на данном препятствии в дальней зоне.

Примечания

1. Приведенные классические результаты дифференциальной геометрии гарантируют существование и единственность решения задачи Минковского, но не предлагают определенного эффективного пути построения соответствующей поверхности. Некоторые конкретные алгоритмы восстановления формы выпуклого препятствия могут быть найдены в последующих разделах.

2. Следует заметить, что восстановление формы выпуклого препятствия, которое сводится в высокочастотном режиме к задаче Минковского, позволяет прийти к некоторым интересным результатам и очень важному заключению, относящемуся к единственности изучаемой обратной задачи.

Предположим, что в рассматриваемом коротковолновом режиме известна амплитуда $A(\alpha)$ обратного рассеяния на некотором невыпуклом препятствии как функция угла наблюдения α . Очевидно, данная функция положительна и непрерывна (некоторые результаты по аналитическим свойствам отраженного волнового поля могут быть найдены, например, в [26]). Как следует из (6.11) (где мы положили $L = L_0$), рассматриваемая амплитуда обратного рассеяния в дальней зоне есть

$$A(\alpha) = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{2L_0^2} = \frac{|p^{\text{inc}}|}{2\sqrt{K} L_0}, \quad p^{\text{inc}} = \frac{e^{ikL_0}}{L_0}, \quad (7.30)$$

которая, очевидно, обладает той же размерностью, что и падающая волна.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K(\alpha) = \frac{|p^{\text{inc}}|^2}{4 A^2(\alpha) L_0^2}. \quad (7.31)$$

Основной результат, установленный выше в этом разделе, гласит, что если выполняется условие (7.29), то существует единственное выпуклое препятствие, гауссова кривизна граничной поверхности которого определяется формулой (7.31). Это приводит к важному выводу. Именно положим, что $A(\alpha)$ — диаграмма обратного рассеяния в дальней зоне для любого (не обязательно выпуклого) препятствия на некоторой фиксированной высокой частоте. Если

$$\int_{\Omega} A^2(\alpha) \mathbf{n}(\alpha) d\alpha = \mathbf{0}, \quad (7.32)$$

то помимо истинного препятствия, генерирующего данную диаграмму, существует также некоторое выпуклое препятствие с диаграммой рассеяния $A(\alpha)$.

Из последнего наблюдения следует еще один интересный вывод. Если мы рассмотрим любое (невыпуклое) препятствие, симметричное относительно начала координат, то очевидно вследствие естественной симметрии, что соотношение (7.32) всегда справедливо, так как вклады

подынтегрального выражения с положительными и отрицательными значениями взаимно сокращаются. То же самое имеет место, если объект симметричен относительно всех осей координатной системы. Таким образом, в этом случае можно гарантировать (по крайней мере на высоких частотах) неединственность решения рассматриваемой обратной задачи о восстановлении граничной поверхности препятствия в акустической среде по ее известной диаграмме обратного рассеяния в дальней зоне.

7.3. Точные явные результаты для двумерной обратной задачи

Изучим теперь двумерную задачу. По аналогии с общим случаем амплитуда обратного рассеяния в лучевом приближении пропорциональна $|\rho(\mathbf{q})|^{1/2}$, где ρ — радиус кривизны в точке зеркального отражения (см. главу 6). Задача снова нелинейна, и удивительно, что она может быть сведена к линейному дифференциальному уравнению в частных производных относительно функции Минковского.

Для вывода этого уравнения опять начнем с формулы Родрига, которая может быть записана вдоль контура: $dx_i - \rho d\alpha_i = 0$, $i = 1, 2$. Так как $x_i = \partial P(\alpha_1, \alpha_2) / \partial \alpha_i$ (или $x_i = P_i$), имеем $dx_i = \sum_{k=1}^2 \partial^2 P / \partial \alpha_k \partial \alpha_i$, так что

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_k \partial \alpha_i} d\alpha_k - \rho d\alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (7.33)$$

Последняя однородная система имеет нетривиальное решение, так что ее определитель равен нулю ($i, k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_k \partial \alpha_i} - \delta_{ik} \rho \right) &= 0 \sim \\ \sim \rho \left[\rho - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_2^2} \right) \right] + \det \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_k \partial \alpha_i} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Можно доказать по аналогии с общим случаем, что однородность P подразумевает обращение последнего определителя в нуль. Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_2^2} = \rho \sim \frac{d^2 p(\theta)}{d\theta^2} + p(\theta) = \rho(\theta), \quad (7.35)$$

где $\rho(\theta)$ — радиус кривизны граничного контура препятствия. Переход от первого ко второму уравнению в формуле (7.35), очевидно, является следствием перехода от прямоугольных координат к полярным в единичном круге $r = 1$.

Хорошо известно, что решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (7.35) для произвольной функции $\rho(\theta)$ имеет вид

$$p(\theta) = p^0(\theta) + p^*(\theta), \quad p^0(\theta) = C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta, \\ p^*(\theta) = \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \rho(\theta) \cos \theta d\theta - \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \rho(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (7.36)$$

где $p^0(\theta)$ — общее решение однородного уравнения, а $p^*(\theta)$ — частное решение неоднородного. Последнее построено методом вариации постоянных, примененным к C_1 и C_2 .

Мы экспериментально проверили данный теоретический метод реконструкции, удобный для двумерных выпуклых препятствий, на некоторых искусственных полостях, изготовленных в тонких металлических брусках. Результаты измерения амплитуды обратного рассеяния в дальней зоне представлены на рис. 7.1. Как видно из рисунка, измерения диаграммы обратного рассеяния проведены здесь с шагом по углу 30° .

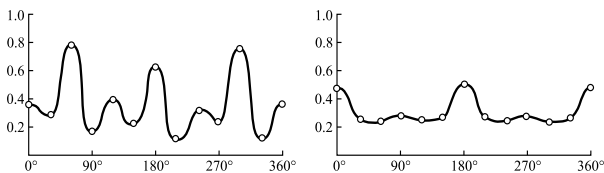


Рис. 7.1. Диаграмма обратного рассеяния для искусственно изготовленных треугольной и овальной полостей

Следует заметить, что несмотря на столь плохие экспериментальные данные (собранные с угловым шагом 30°), результаты реконструкции (восстановления) формы дефекта показывают, что предложенный метод весьма устойчив. Результаты реконструкции продемонстрированы на рис. 7.2, где истинная граница показана сплошной, а восстановленный контур — штриховой линией.

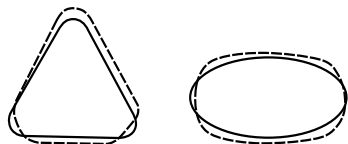


Рис. 7.2. Результаты восстановления треугольной и овальной полостей

Другой возможный подход здесь — это прямое решение дифференциального уравнения (7.35) методом конечных разностей, и проведенный детальный численный анализ подтверждает эффективность также и этого метода. Интересно продемонстрировать нашу схему на простом препятствии — таком, как круглый диск. Если радиус диска равен R , то в данном случае $\rho(\theta) \equiv R$, $p(\theta) \equiv R$, когда начало системы координат взято в центре препятствия. Очевидно, для таких значений $\rho(\theta)$ и $p(\theta)$ выполняется соотношение (7.35). Изучим влияние положения начала координат внутри препятствия на процесс реконструкции. Численное исследование показывает, что когда мы используем симметричное конечно-разностное представление для производных $p_{\theta\theta}^i = (p^{i+1} - 2p^i + p^{i-1})/(\Delta\theta)^2$ (i — количество узлов на сетке, $\Delta\theta$ — шаг дискретизации), тогда численно приходим к решению $\rho(\theta) \equiv R$, упомянутому выше. Более того, симметричное положение начала координат получается для любого симметричного препятствия, если мы пользуемся симметричной формой конечных разностей для производной. Данный результат можно понять, приняв во внимание, что любая симметрия вектора $\{p^i\}$ приводит к той же симметрии в $\rho(\theta)$ в силу единственности решения обратной задачи, рассмотренной в разделах 7.1, 7.2. Для произвольного препятствия, которое не обладает никакой симметрией, алгоритм восстановления приводит к тому, что начало координат может смещаться при изменении конечно-разностной схемы.

Более подробно исследование данной задачи изложено в работе [123].

Примечание. Заметим, что изученная обратная задача нелинейна в своей постановке как в трехмерном, так и в двумерном случае. И удивительно, что данная формулировка в терминах опорной функции Минковского сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (7.35), позволяя дать строгое аналитическое решение в точной форме по крайней мере в двумерном случае.

7.4. Точное явное решение в случае осевой симметрии

Пусть осесимметричное препятствие, ограниченное поверхностью S , сферически облучается высокочастотной акустической волной; время распространения отраженного импульса $t(q)$ и вещественная амплитуда отраженной волны $|A(q)|$ известны для любого направления q . Обозначим выпуклые части поверхности S через S_{ex} , а невыпуклые части через S_{in} . Ограничимся рассмотрением препятствий с простой связной областью S , допускающей не более двух точек простого зеркального отражения в любом направлении распространения в эхо-режиме. В работе [22] показано, что данное условие непременно выполняется, если угол между нормальными к поверхности S в любых двух ее точках на одном невыпуклом участке — острый. Мы исполь-

зуем это ниже, а в настоящем разделе ограничимся рассмотрением осесимметричных выпуклых препятствий.

Рассмотрим осесимметричную поверхность S , ограничивающую препятствие в прямоугольной системе координат $OXYZ$, где ось OZ совпадает с осью симметрии S . Для определенности рассмотрим плоскость осевого сечения XOZ . В ней единичный вектор q имеет координаты $\{\sin \theta, 0, \cos \theta\}$ и $A = A(\theta)$, где θ — угол между осью симметрии OZ и направлением q .

Прежде всего из известного времени распространения отраженного импульса $t(\theta)$ определим расстояние $p(\theta)$ до касательной в точке зеркального отражения. В плоскости осевого сечения это расстояние определяется уравнением

$$x \sin \theta + z \cos \theta - p(\theta) = 0. \quad (7.37)$$

По этой известной функции $p(\theta)$ построим выпуклую оболочку поверхности:

$$x(\theta) = -p'(\theta) \cos \theta + p(\theta) \sin \theta, \quad z(\theta) = p'(\theta) \sin \theta + p(\theta) \cos \theta, \quad (7.38)$$

которая определяет наименьший выпуклый контур S_0 , окружающий данный контур (см. [109]).

Здесь мы опишем стабильный (корректный) подход реконструкции на основе известной амплитуды обратного рассеяния, т.е. используя функцию $A(\theta)$. В данном случае амплитуда обратного рассеяния в дальней зоне, если опустить несущественный множитель, выражается в терминах гауссовой кривизны. В следующем разделе будет показано, что при осевой симметрии она описывается следующим нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\left(\frac{d^2 p}{d\theta^2} + p \right) \left(\frac{dp}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + p \right) = \gamma^{-1}(\theta), \quad (7.39)$$

где $\gamma(\theta)$ — известная гауссова кривизна.

Заметим, что первый сомножитель оператора (7.39) осесимметричной обратной задачи является оператором обратной задачи для плоского случая, рассмотренного в предыдущем разделе, основное уравнение которого приведем здесь еще раз:

$$\frac{d^2 p(\theta)}{d\theta^2} + p(\theta) = \rho(\theta). \quad (7.40)$$

Выпишем также решение уравнения:

$$\begin{aligned} p(\theta) &= p^0(\theta) + p^*(\theta), \quad p^0(\theta) = C_1 \sin(\theta) + C_2 \cos(\theta), \\ p^*(\theta) &= \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \rho(\theta) \cos \theta \, d\theta - \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \rho(\theta) \sin \theta \, d\theta. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Решение нелинейного уравнения (7.39) для осесимметричного случая можно получить в точной форме, сведя его к последовательному решению двух линейных дифференциальных уравнений первого рода с переменными коэффициентами. Здесь необходимо заметить, что при использовании дифференциального оператора первого порядка с переменными коэффициентами первый дифференциальный множитель с постоянными коэффициентами в левой части (7.39) может быть выражен в терминах второго множителя (также с переменными коэффициентами):

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} + p = \operatorname{tg} \theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dp}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + p \right) + \left(\frac{dp}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + p \right). \quad (7.42)$$

Это представление позволяет с помощью замены

$$\frac{dp(\theta)}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + p(\theta) = U(\theta) \quad (7.43)$$

свести исходное уравнение к уравнению Бернулли

$$\operatorname{tg} \theta \frac{dU(\theta)}{d\theta} + U(\theta) = U^{-1}(\theta) \gamma^{-1}(\theta). \quad (7.44)$$

Следуя общей теории дифференциальных уравнений, подстановкой $U^2(\theta) = f(\theta)$ уравнение (7.44) может быть сведено к линейному уравнению для функции $f(\theta)$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + 2 \operatorname{ctg} \theta f(\theta) = 2 \gamma^{-1}(\theta) \operatorname{ctg} \theta. \quad (7.45)$$

Будем искать решение данного уравнения в форме произведения двух функций $f(\theta) = u(\theta)v(\theta)$. Выберем функцию $v(\theta)$ как частное решение однородного уравнения $v(\theta) = \sin^{-2} \theta$. Тогда $u(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = \gamma_2^{-1}(\theta) \sin 2\theta, \quad (7.46)$$

общее решение которого

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \gamma^{-1}(\theta) \sin 2\theta d\theta + C_1. \quad (7.47)$$

Таким образом, мы определили функцию $U(\theta)$, т.е. общее решение уравнения (7.44):

$$U(\theta) = f^{1/2}(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} \left[\int_{\theta_0}^{\theta} \gamma_2^{-1}(\theta) \sin 2\theta d\theta + C_1 \right]^{1/2}. \quad (7.48)$$

После нахождения $U(\theta)$ становится известной также и правая часть уравнения (7.43) для функции $p(\theta)$. Решение линейного дифференциального уравнения (7.43) можно получить тем же путем, что и решение

уравнения (7.45). В результате функция $p(\theta)$ может быть представлена в виде

$$p(\theta) = \cos \theta \left\{ \int_{\theta_0}^{\theta} \left[\cos^{-2} \theta \left(\int_{\theta_0}^{\theta} \gamma_2^{-1} \theta \sin 2\theta d\theta + C_1 \right)^{1/2} \right] + C_2 \right\}. \quad (7.49)$$

Данные результаты представлены в работе [6].

Примечание. Следует заметить, что общие решения как в плоской, так и в осесимметричной задаче (формулы (7.41)) и (7.49) соответственно) содержат, согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений, пару произвольных постоянных C_1 и C_2 . В обоих случаях функция $p(\theta)$ определяет плоскую граничную кривую. Единственное отличие состоит в том, что в случае осесимметричной задачи граничная кривая представляет собой некоторое осевое сечение. Для того чтобы однозначно определить функцию $p(\theta)$ в (7.49) (как и в (7.41) в плоской задаче) для конкретной поверхности S , необходимо поставить два граничных (или начальных) условия. Обычно такие условия ставятся так, чтобы решение было периодическим.

7.5. Реконструкция невыпуклых препятствий в двумерном случае

Предположим, что акустическая среда содержит невыпуклое препятствие (рис. 7.3), имеющее кусочно-гладкую границу L с положительной кривизной и M угловыми точками. Для этого контура построим выпуклую оболочку L_0 (т.е. наименьший выпуклый контур, содержащий L_0). Пусть L_m — общие сегменты контуров L и L_0 $\left(\bigcup_{m=1}^M L_m = L \cap L_0 \right)$ и l_m — сегменты, которые принадлежат только к L $\left(\bigcup_{m=1}^M l_m = L \setminus L_0 \right)$. Предположим, что, когда L облучается звуковой волной под произвольным углом α , количество отдельных точек рассеяния не превышает двух. Доказано, что на граничных сегментах l_m многократное рассеяние, порождающее обратно-отраженный луч, должно отсутствовать, если две нормали n_{m1} и n_{m2} , проведенные из двух произвольных точек l_m , образуют острый угол β_m [22]. Принимая во внимание все ограничения, наложенные на L , каждый сегмент l_m может быть составлен лишь двумя пересекающимися дугами l_{m1} и l_{m2} , причем угол между нормальными к этим дугам в точке их пересечения — острый.

Когда препятствие зондируется в эхо-режиме под произвольным углом α , всегда существует по крайней мере одна точка зеркального отражения, которая лежит на граничных сегментах L_m . В общем случае в зоне l_m диаграмма рассеяния более сложна. Тем не менее

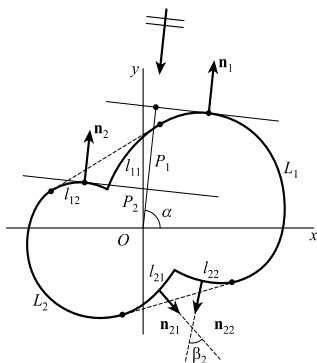


Рис. 7.3. Дифракция плоской акустической волны на двумерном невыпуклом препятствии

вышеупомянутые предположения подразумевают, что для данного угла падения существует одна точка простого однократного отражения, лежащая на одной из дуг l_{m1} и l_{m2} граничного сегмента l_m .

Рассматриваемый алгоритм реконструкции базируется на следующем соображении. Предположим, что в круговом эхо-зондировании известными параметрами являются время прихода отраженного импульса $t(\alpha)$ и вещественная амплитуда отраженной волны $|A(\alpha)|$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Знание $t(\alpha)$ полностью определяет выпуклую оболочку границы объекта, так как оно определяет опорную функцию $p(\alpha)$ — расстояние от некоторого выбранного центра O внутри области до выпуклой границы $\bigcup_{m=1}^M L_m$ в точке с нормалью $n(\alpha)$ (см рис. 7.3). Выпуклая оболочка L_0 контура L является огибающей семейства данных касательных. Ее декартовы координаты определяются в виде

$$x = -p'_\alpha(\alpha) \sin \alpha + p(\alpha) \cos \alpha, \quad y = p'_\alpha(\alpha) \cos \alpha + p(\alpha) \sin \alpha. \quad (7.50)$$

Как только при помощи известной функции $t(\alpha)$ построена выпуклая оболочка L_0 (7.50), дуги l_{m1} и l_{m2} могут быть определены из граничных сегментов l_m использованием комплексной амплитуды отраженной волны $A(\alpha)$. В области $0 \leq \alpha < 2\pi$, где существует только отражение от выпуклых частей L_m , амплитуда отраженной волны

$$A \sim \frac{e^{i(2kR - \pi/4)}}{\sqrt{\pi k} \sqrt{R + \frac{R^2}{\rho_1 \cos \theta}}}, \quad (7.51)$$

где R — расстояние между точкой наблюдения и граничным контуром L ; $\cos \theta = 1$, так как в рассматриваемом случае $\theta = 0$; k — волновое число и ρ_1 — радиус кривизны контура в точке зеркального отражения на выпуклом сегменте границы. В дальней зоне ($R \rightarrow \infty$) последняя формула может быть приближенно переписана в виде

$$A(\alpha) \sim \sqrt{\rho_1(\alpha)} e^{-2ip_1(\alpha)k}. \quad (7.52)$$

На других интервалах углов α волны, отраженные от одной точки на $L_m(2)$ и одной точки на l_m , перекрывают друг друга. В таком случае амплитуда отраженной волны сводится к виду

$$A(\alpha) = \sqrt{\rho_1(\alpha)} e^{-2ip_1(\alpha)k} + \sqrt{\rho_2(\alpha)} e^{-2ip_2(\alpha)k}. \quad (7.53)$$

В формулах (7.51)–(7.53) $\rho_1(\alpha)$ и $\rho_2(\alpha)$ — радиусы кривизны в точках сегментов L_m и l_m соответственно, $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ — опорные функции. Комплексная амплитуда обратного рассеяния, определенная из этих выражений, имеет форму, независимую от расстояния между препятствием и точкой наблюдения. Тогда для интенсивности отраженной волны имеем

$$\begin{aligned} F(\alpha) = F(\alpha, k) &= |A(\alpha)|^2 = \\ &= \rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + 2\sqrt{\rho_1(\alpha)\rho_2(\alpha)} \cos[2k(p_1 - p_2)]. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Заметим, что формула (7.53) учитывает вклады от точек лучевого отражения в амплитуду рассеянной волны. В освещенной зоне при $k \rightarrow \infty$ вклад от других точек гладких граничных сегментов есть величина более малого порядка чем k^{-1} (см. раздел 1.4). Однако граница имеет угловые точки. В рассматриваемом случае отсутствия многократных отражений вклад углов в функцию $A(\alpha)$ имеет порядок $k^{-1/2}$ и, следовательно, при $k \rightarrow \infty$ становится малой величиной.

В классической акустической голографии предполагается, что основная информация содержится в осциллирующей компоненте формулы (7.54). В настоящем разделе мы предлагаем альтернативное решение, которое основано на следующей идее. Заметим, что в формуле (7.54) только последний член зависит от k . На высоких частотах это сильноосциллирующая функция α . Поэтому первые два члена являются слабоосциллирующими функциями α только в случае, если контур не имеет сегментов с резкими изменениями кривизны. Используя фильтрацию (например, цифровую), выделим слабоизменяющуюся компоненту в $F_0(\alpha)$, тогда

$$F_0(\alpha) = \rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha). \quad (7.55)$$

Теперь на выпуклой части L_m радиус кривизны $\rho_1(\alpha)$ может считаться известным, после того как построена выпуклая оболочка контура. Данное построение определяет кривизну дуг l_{m1} и l_{m2} на l_m в виде

$$\rho_2(\alpha) = F_0(\alpha) - \rho_1(\alpha). \quad (7.56)$$

Как было замечено выше, для выбранного класса граничных контуров L , каждый сегмент l_m состоит из двух выпуклых пересекающихся дуг l_{m1} и l_{m2} , имеющих общее касание с выпуклой оболочкой L_0 (см. рис. 7.3). Для реконструкции каждой из этих дуг можно воспользоваться подходом, разработанным в разделе 7.3, который сводит реконструкцию выпуклых частей граничного контура к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, точное аналитическое решение которого определяется в явном виде. Однако альтернативный эффективный подход может быть основан на натуральном уравнении плоской кривой (см., например, [38])

$$s'_\alpha(\alpha) = \rho_2(\alpha), \quad (7.57)$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от точки касания. В декартовой системе координат данная дуга описывается следующим образом:

$$x(s) = - \int_0^s \sin \alpha(s) ds + x_0, \quad y(s) = \int_0^s \cos \alpha(s) ds + y_0, \quad (7.58)$$

где

$$s = s(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} [F_0(\alpha) - \rho_1(\alpha)] d\alpha \quad (7.59)$$

и x_0 и y_0 — прямоугольные координаты пересечения дуги и касательной к выпуклой оболочке L_0 . Выражения (7.58) учитывают тот факт, что в любой точке контура касательная направлена под углом $\pi/2$ к нормали. Заметим также, что угол α_0 определяется нормалью в точке касания; данная нормаль является общей для соседних сегментов L_m и L_{mj} , $j = 1, 2$, контура L . В самом деле, эта точка является точкой касания криволинейной дуги, принадлежащей выпуклому сегменту границы и построенной выше выпуклой оболочки объекта. Так как граничный контур гладкий, нормаль $n(\alpha_0)$ в точке касания определяется единственным образом.

Подходящий выбор верхнего предела по α играет важную роль в использовании формул (7.58) и (7.59). Пределы интегрирования должны совпадать с видимым сегментом дуги l_{mj} ; это эквивалентно тому, что формула (7.59) справедлива только для такого α , который обеспечивает зеркальное отражение от дуги l_{mj} . Несомненно, такие интервалы α связаны с присутствием двух точек зеркального отражения (одна на L_m , другая на l_{mj}). Таким образом, построенные интервалы относятся к тем α , для которых амплитуда $|A(\alpha)|$ обратного рассеяния сильно осциллирует в высокочастотной области (см. формулу (7.54)).

Для лучшего понимания данного вопроса на рис. 7.4 приведена диаграмма обратного рассеяния от акустически мягкого препятствия, выполненного в виде двух равных кругов радиуса R с расстоянием между их центрами $\sqrt{2} R$ ($R = 3\lambda$, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны).

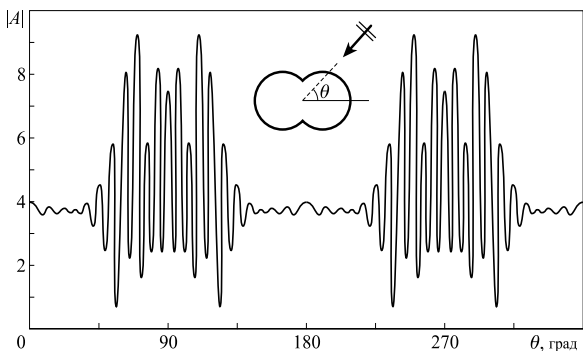


Рис. 7.4. Амплитуда рассеяния парой пересекающихся окружностей

Диаграмма обратного рассеяния $A(\alpha)$ определена из решения прямой задачи дифракции методом ГИУ (см. главу 2).

Заметим, что угол между нормальными в двух произвольных точках на любой внутренней части S_{in} меньше, чем $\pi/2$. Единственный случай, при котором достигается предельное значение $\pi/2$, относится к точкам пересечения двух окружностей. Следовательно, как было указано выше, в области S_{in} присутствуют только точки однократного зеркального отражения для произвольного направления падения, а многократные лучевые переотражения невозможны. Из рис. 7.4 ясно, что при изменении угла на интервале $0 \leq \theta < 2\pi$ существуют как области с медленным изменением амплитуды $|A(\theta)|$, так и области, где данная функция сильно осциллирует. Приближенные значения θ_1 и θ_2 выбираются просто как точки перехода от слабых осцилляций к сильным.

В практических реализациях численного алгоритма верхний предел интегрирования α_1 в (7.59) определяется приближенно, так как мы не можем точно определить границу между интервалами сильного и медленного изменения известной амплитуды рассеяния. Во всех рассмотренных экспериментах дуги каждой пары l_{m1} , l_{m2} проходят где-то на определенном расстоянии от точки пересечения. Следовательно, при восстановлении односвязной области необходимо выбрать только те части этих дуг, которые лежат между точкой касания с выпуклой оболочкой L_0 и точкой их пересечения.

Предложенный алгоритм восстановления использует естественный метод фильтрации для низкочастотной компоненты $F_0(\alpha)$ из $F(\alpha) = |A(\alpha)|^2$. Он основан на том, что при подстановке экспериментально

определенной $F(\alpha)$ в (7.59) интегрирование в данной формуле

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} [F(\alpha) - \rho_1(\alpha)] d\alpha \quad (7.60)$$

обеспечивает фильтрацию низкочастотной компоненты. Для корректного вычисления интеграла (7.60) необходимо корректно определить значение малого шага интегрирования. Выпуклая оболочка определяет характерный размер d препятствия. Если мы предположим, что десять точек на длину волны достаточно для корректного вычисления данного интеграла, то количество узловых точек в интегрировании может быть оценено как $10d/\lambda$. Формула (7.60) учитывает тот факт, что главный член асимптотического разложения, полученный из интеграла последнего осциллирующего слагаемого в (7.54) методом стационарной фазы (см. раздел 1.4) при $k \rightarrow \infty$ имеет порядок $O(k^{-1})$.

Численные эксперименты показывают, что данный естественный метод фильтрации обеспечивает более аккуратное восстановление, нежели многие известные процедуры. Таким образом, установлено, что вычисление самих интегралов в этих задачах обеспечивает эффективное отфильтровывание высокочастотных подынтегральных функций, если шаг интегрирования фиксирован и не зависит от длины волны.

Результат реконструкции по вещественной круговой амплитуде обратного рассеяния $|A|$ (см. рис. 7.4) согласно представленному алгоритму показан на рис. 7.5. Точность реконструкции не хуже 2–3% равномерно по всем направлениям падения. Заметим, что сплошные линии отображают здесь истинный контур, а штриховые линии представляют контур, восстановленный описанным методом.

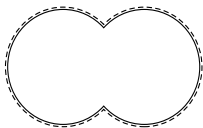


Рис. 7.5. Реконструкция препятствия, выполненного как пара пересекающихся окружностей

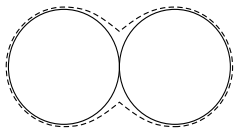


Рис. 7.6. Реконструкция препятствия в форме пары касающихся окружностей

Представленные здесь результаты более подробно описаны в работе [6].

Примечания

1. Данный алгоритм был протестирован на восстановлении геометрий, которые не принадлежат к рассматриваемому классу. Одна из них представлена на рис. 7.6, где углы между нормальными к дугам l_{m1} и l_{m2} могут быть тупыми и даже близкими к π . Область состоит из двух касающихся окружностей с $R = 3\lambda$. В данном случае дуги l_{m1} и l_{m2} допускают многократные отражения лучей. Тем не менее точность реконструкции остается приемлемой и, по-видимому, область применимости данного метода на самом деле шире, чем рассмотренный выше класс контуров.

2. Данный вывод подтверждается также реконструкцией гладкого контура в виде трехлепестковой розы

$$\rho(\varphi) = a(2 + \cos 3\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (7.61)$$

показанной на рис. 7.7. Контур не принадлежит к рассматриваемому классу, так как содержит сегменты с отрицательной кривизной.

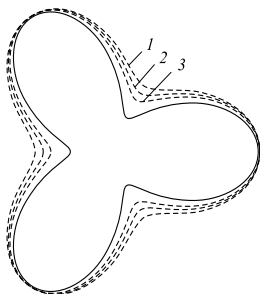


Рис. 7.7. Реконструкция трехлепестковой розы: сплошная линия — точная граница; штриховая линия — восстановленная граница: $a = 2\lambda$ (кривая 1), 4λ (кривая 2) и 6λ (кривая 3)

Штриховые кривые соответствуют $a = 2\lambda$, 4λ и 6λ (1, 2 и 3 соответственно). Характерный размер препятствия — 10λ , 20λ , и 30λ соответственно. Видно, что точность восстановления растет с ростом частоты. Следовательно, на практике предложенный метод применим к более широкому классу граничных поверхностей, чем исследованные в настоящем разделе.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ

8.1. Некорректные задачи для уравнений первого рода

Основы теории некорректно поставленных задач для операторных уравнений первого рода были разработаны А. Н. Тихоновым [51] и стали естественным развитием некоторых идей Адамара и других классиков.

Ж. Адамар впервые сформулировал концепцию корректных задач для операторного уравнения

$$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \quad (8.1)$$

где A — линейный оператор, действующий из банахова пространства U в банахово пространство F . Она включает три пункта:

- 1) уравнение (8.1) имеет решение для любого $f \in F$;
- 2) решение единственно;
- 3) решение устойчиво по отношению к малым возмущениям правой части. Другими словами, малое возмущение f (в метрике F) влечет за собой малое возмущение u (в метрике U).

Впоследствии было установлено, что для корректной трактовки последнее условие — наиболее важное. Таким образом, краевые задачи корректны для эллиптических систем, а начальные задачи (Коши) — для гиперболических систем, но не наоборот.

Очевидно, существования ограниченного оператора A^{-1} достаточно для того, чтобы выполнялось условие 3. Тем не менее, как показано в разделе 1.6, в случае когда A компактен, обратного оператора A^{-1} не существует. Между тем операторные уравнения первого рода (8.1) с компактным оператором A широко распространены в прикладной математике. Типичный пример — интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (8.2)$$

с непрерывным (по обоим аргументам) ядром $K(x, \xi)$, $a \leq x, \xi \leq b$. В разделе 1.5 было доказано, что подобный оператор Au компактен в $C(a, b)$, т. е. когда $U = F = C(a, b)$. Также хорошо известно [24],

что оператор (8.2) является компактом в гильбертовом пространстве $U = F = L_2(a, b)$.

Для того чтобы стало яснее, почему решение уравнения (8.2) неустойчиво относительно малых возмущений правой части, предположим, что $Au_0 = f_0$, $u_0 \in C(a, b)$, $f_0 \in C(a, b)$, и возьмем $u_1 = u_0 + \cos \lambda t$. Понятно, что в случае $a = 0$, $b = 2\pi$ и $\lambda > 1$ имеем $\|u_1 - u_0\| = 1$. Если обозначить $f_1 = Au_1$, то

$$\begin{aligned} \|f_1 - f_0\| &= \|A(u_1 - u_0)\| = \max_{x \in (0, 2\pi)} \left| \int_0^{2\pi} K(x, t) \cos \lambda t \, dt \right| = \\ &= \frac{1}{2} \max_{x \in (0, 2\pi)} \left| \int_0^{2\pi} K(x, t) (e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}) \, dt \right|. \quad (8.3) \end{aligned}$$

Пусть ядро $K(x, t)$ дифференцируемо по t . Тогда, согласно результатам раздела 1.4, $\|f_1 - f_0\| = O(1/\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$. Следовательно, для достаточно большого λ малые возмущения правой части соответствуют конечному изменению решения.

Данный пример и некоторые общие теоретические идеи намечают возможный подход, при котором можно гарантировать стабильность относительно малых вариаций f . В самом деле, рассматриваемый набор функций $\{u_0 + \cos(\lambda t)\}$ не удовлетворяет критерию Арцела–Асколи компактности в $C(a, b)$ (см. раздел 1.5), так как данные функции не равномерно непрерывны при $\lambda \rightarrow \infty$. Классические результаты функционального анализа [24] показывают, что если искать решение уравнения (8.1) на некотором компактном множестве $V \subset U$, то решение непрерывно зависит от f . Это обеспечивается следующей теоремой.

Теорема. Если непрерывный оператор $A: U \rightarrow F$ определяет взаимно-однозначное отображение компактного множества $V \subset U$ в множество $AV = G \subset F$, то обратный оператор A^{-1} также непрерывен на G .

Данная теорема определяет достаточно естественный путь построения стабильного решения, который называется методом *решения подбором*. Он состоит в минимизации невязки на некотором компактном множестве $V \subset U$ и нахождении приближенного решения u_0 уравнения (8.1), если

$$\min_{u \in V} \|Au - f\| = \|Au_0 - f\|. \quad (8.4)$$

Ясно, что если $u_0 \in V$, то решение устойчиво относительно малых изменений f , так как A^{-1} непрерывен на $G = AV$.

Эти идеи приводят к концепции *корректности в смысле Тихонова* вместо корректности в смысле Адамара.

Определение. Задача (8.1) называется *корректно поставленной* в смысле Тихонова если:

1) для некоторого f_0 существует решение u_0 данного уравнения, принадлежащее компактному множеству V : $u_0 \in V$, $Au_0 = f_0$;

2) данное решение u_0 единственно.

Ясно, что в данном случае оператор A^{-1} непрерывен на множестве $G = AV$. Так что если правая часть f уравнения (8.1) задается с некоторым малым возмущением (что обычно имеет место, когда она известна с некоторой малой погрешностью) и $f \in G$, то элемент $u = A^{-1}f$ может рассматриваться как корректная аппроксимация точного решения $u_0 = A^{-1}f_0$ вследствие непрерывности оператора A . Рассматриваемое компактное множество $V \subset U$ называется *классом корректности* для оператора A .

Здесь можно перечислить наглядные случаи, когда могут быть эффективно применены изложенные идеи.

1. Случай, когда мы ищем решение внутри конечномерного подмножества V банахова пространства U . Фактически любое конечномерное подмножество является компактом в банаховом пространстве.

Например, рассмотрим интегральное уравнение (8.1) на симметричном относительно нуля интервале, равном периоду тригонометрических функций:

$$(Au)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq \pi. \quad (8.5)$$

Если ядро, например, четно по обоим переменным x, ξ , а также правая часть $f(x)$ четна по x , то решение уравнения (8.5) также четно и можно искать его приближенное решение в форме

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m \cos(mx), \quad (8.6)$$

где сохранения нескольких членов обычно достаточно для хорошей аппроксимации точного решения $u_0(x)$ (если последнее существует и единственно). На деле необходимо минимизировать невязку $\rho_n = \|Au_n - f\|$. Это может быть достигнуто как методом подбора, так и прямым решением соответствующей вариационной задачи. В последнем случае наиболее разумно рассматривать уравнение (8.6) в гильбертовом пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Тогда приходим к проблеме минимизации квадратичного функционала по отношению к неизвестным коэффициентам a_m , $m = 0, 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \min_{\{a_m\}} \rho_n, \quad \rho_n &= \|Au_n - f\|^2 = (Au_n - f, Au_n - f) = \\ &= \sum_{m,j=0}^n a_m a_j (A\varphi_m, A\varphi_j) - 2 \sum_{m=0}^n a_m (A\varphi_m, f) + (f, f), \quad \varphi_m(x) = \cos(mx), \end{aligned} \quad (8.7)$$

решение которой может быть найдено с использованием хорошо известного критерия минимума $\partial \rho_n / \partial a_m = 0$, $m = 1, 2, \dots, n$. Эта техника приводит к следующей алгебраической системе относительно коэффициентов a_m , $m = 0, 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=0}^n (A\varphi_j, A\varphi_m) a_j = (f, A\varphi_m), \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (8.8)$$

Интересно, что данная система совпадает с той, которую можно построить методом Галеркина [34], если взять конечное число базисных функций $\varphi_m(x)$.

Другая подходящая структура приближенного решения

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m \quad (8.9)$$

во многих случаях приводит к более стабильному методу, чем метод, основанный на тригонометрическом базисе. Структура (8.9) представляет собой линейную комбинацию монотонных функций, и следующий раздел объясняет, почему оператор с монотонными функциями обычно приводит к стабильному счету.

2. Во многих задачах бывает известна некоторая априорная информация о качественной структуре решения. Например, в арктических морях изменение волновой скорости с глубиной представляет собой положительную монотонно возрастающую функцию. Один из основных результатов функционального анализа гласит, что любое множество монотонных функций есть компакт в $L_2(a, b)$. Доказательство приведено, например, в работе [51]. Таким образом, если решать задачу восстановления функции волновой скорости в стратифицированном океане по некоторым измеренным данным об амплитуде отраженной акустической волны, то можно искать неизвестную функцию подбором в классе монотонно возрастающих функций. В качестве подходящего метода можно упомянуть также представление решения в форме (8.9) с неизвестными, но положительными коэффициентами a_m , $m = 1, 2, \dots, n$. Множество подобных функций состоит только из монотонных функций. Заметим, что стабильный счет здесь обеспечивается с произвольным, даже весьма большим числом n , так как в данном случае нет необходимости проверять, является ли построенный набор конечномерным.

Примечание. Когда общая стратегия, описанная выше, применяется для построения корректного (т. е. стабильного) решения некорректно поставленной операторной задачи первого рода, мы можем столкнуться с ситуацией, когда точное решение u_0 , соответствующее точной правой части f_0 , принадлежит к компактному множеству $V \subset U$: $u_0 \in V$, $Au_0 = f_0 \in G = AV$, но возмущенная правая часть f находится вне множества $G = AV$: $f \notin G$. В подобных случаях уравнение (8.1) может

не иметь решения в классическом смысле. Для таких случаев была предложена концепция квазирешения [51].

Определение. Пусть V — компактное множество в банаховом пространстве U . Тогда элемент $u^* \in V$, обеспечивающий минимум функционала: $\min_{u \in V} \rho(u) = \rho(u^*)$, $\rho(u) = \|Au - f\|$, называется **квазирешением уравнения** (8.1).

Очевидно, что так как V — компактное множество, то квазирешение, безусловно, существует (его единственность под вопросом). Кроме того, можно указать случай, когда квазирешение одновременно является классическим решением, а именно при $f \in G = AV$. Некоторые интересные и важные результаты по квазирешениям изложены в работе [51].

8.2. Регуляризация с помощью сглаживающего функционала

Как видно из предыдущего раздела, решение операторного уравнения $Au = f$, где компактный линейный оператор A действует из одного банахова пространства U в другое банахово пространство F , т. е. $A: U \rightarrow F$, наверняка стабильно относительно малых возмущений правой части f , если это решение ищется на определенном компактном подмножестве $V \subset U$ и если $f \in AV$. Тем не менее в некоторых случаях возмущенная правая часть f_δ находится вне множества AV : $f_\delta \notin AV$, будучи в то же время весьма близкой к точной функции f : $\|f - f_\delta\| < \delta$, где $\delta > 0$ — некоторая малая положительная величина. В подобных случаях результаты раздела 8.1 не гарантируют стабильность решения $Au_\delta = f_\delta$, т. е. того, что расстояние $\|u - u_\delta\|$ мало. Это кажется немного странным. Равенство $Au_\delta = f_\delta$ подразумевает, что решение рассматриваемого операторного уравнения существует в пространстве U , и во многих случаях оно даже единственно. Тем не менее малые изменения в f приводят к большим изменениям в решении, что на самом деле является особым свойством уравнений первого рода.

Для того чтобы обойти данные трудности, а также по некоторым другим причинам, А. Н. Тихонов [51] ввел концепцию регуляризации некорректно поставленных задач. Основная идея близка к некоторым фундаментальным идеям М. М. Лаврентьева [32].

Пусть для простоты оператор A — самосопряженный и положительный в некотором гильбертовом пространстве, т. е. $A: H \rightarrow H$. Если это не так, то умножением уравнения $Au = f$ на A^* слева мы можем достигнуть обоих требуемых свойств. В таком случае, как следует из результатов раздела 1.5, оператор $A + \alpha I$, где I — единичный оператор, обратим с произвольным положительным $\alpha > 0$, т. е. оператор $(A + \alpha I)^{-1}$ непрерывен на H .

В самом деле, для положительного оператора A все его собственные значения λ_n неотрицательны, следовательно, для оператора $A + \alpha I$,

$\alpha > 0$, они все положительны. Следовательно, точка $\lambda = 0$ — регулярное значение оператора $(A + \alpha I - \lambda I)$. Тогда согласно фундаментальной теореме теории операторов [24] можно заключить, что $(A + \alpha I)$ обратим.

Эвристически, если $0 < \alpha \ll 1$, то новый оператор $A + \alpha I$ в некотором смысле близок к основному оператору A . Так что можно надеяться, что построенное подобным образом решение $u_\alpha = (A + \alpha I)^{-1} f$ может быть принято для некоторого малого $\alpha > 0$ в качестве приближенного решения основного уравнения $Au = f$ и устойчиво относительно малых вариаций произвольного элемента $f \in F$.

Эта идея была далее развита Тихоновым, который ввел концепцию регуляризации сглаживающим функционалом. Данный метод в простой трактовке состоит в рассмотрении вариационной проблемы минимизации функционала

$$M_\alpha(u, f) = \|Au - f\|^2 + \alpha \|u\|^2, \quad \alpha > 0, \quad (8.10)$$

и обосновывается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть A — взаимно-однозначный линейный оператор, действующий из выпуклого замкнутого множества $V \subset H$ в множество $AV = G \subset H$, и $u \in V$ — (единственное) решение уравнения $Au = f$ для определенного данного $f \in G$. Тогда существует единственное решение $u_\alpha \in V$ задачи минимизации

$$u_\alpha: \inf_{u \in V} M_\alpha(u, f) = M_\alpha(u_\alpha, f). \quad (8.11)$$

Доказательство. Функционал (8.10)

$$M_\alpha(u, f) = (Au - f, Au - f) + \alpha(u, u) \quad (8.12)$$

квадратичен относительно u . Следовательно, он бесконечно дифференцируем и легко вычислить его дифференциалы Фреше первого порядка и второго порядка (первый из них фактически является градиентом). Они могут быть получены из малой вариации функционала следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_u M_\alpha(u, f) &= 2(Au - f, A\delta u) + 2\alpha(u, \delta u) = 2(A^* Au - A^* f + \alpha u, \delta u), \\ \text{grad}_u M_\alpha(u, f) &= 2(A^* Au - A^* f + \alpha u). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Далее

$$\begin{aligned} \delta_{uu}^2 M_\alpha(u, f) &= 2(A^* A\delta u + \alpha \delta u, \delta u) = \\ &= 2(A\delta u, A\delta u) + 2\alpha(\delta u, \delta u) \geq 2\alpha \|\delta u\|^2, \end{aligned} \quad (8.14)$$

так что функционал $M_\alpha(u, f)$ — строго выпуклый. Из функционального анализа [35, 36, 82] следует, что любой строго выпуклый функционал достигает своего (единственного) минимального значения на выпуклом замкнутом множестве $V \in H$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если решение вариационной задачи (8.11), $u_\alpha \in V$, — внутренняя точка множества V , то она может быть найдена из однозначно разрешимого уравнения

$$A^*Au + \alpha u = A^*f. \quad (8.15)$$

Доказательство. Известно [35, 51, 82], что при условиях данной теоремы задача минимизации сильновыпуклого функционала сведением к уравнению Эйлера приводит к необходимому и достаточному условию: $\text{grad } M_\alpha = 0$, которое, принимая во внимание (8.13), эквивалентно (8.15). Теорема доказана.

Теорема 3. Если выполнены условия теорем 1 и 2 и u_* является (единственным) точным решением уравнения $Au = f$, то

$$\|u_\alpha - u_*\| \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0; \quad \frac{\delta^2}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \|f_\delta - f\| \leq \delta. \quad (8.16)$$

Доказательство можно найти в книге [52] и для более общего случая — в книге [51].

Данная теорема дает эффективный инструмент выбора подходящего значения регуляризирующего параметра α . В самом деле, если ошибка в правой части f достаточно мала (порядка δ), то параметр регуляризации α не может быть выбран слишком малым. Оптимальным будет выбор $\alpha \sim \delta^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Подробнее этот важный вопрос оптимального выбора параметра α будет обсужден ниже.

Основная идея регуляризации по Тихонову, отраженная в теоремах 1–3, связана с тем фактом, что гладкий функционал $M_\alpha(u, f)$ является строго выпуклым, так что он достигает минимума в точке $u = u_\alpha$. Это позволило Тихонову предложить альтернативную концепцию регуляризации более гладкими стабилизаторами. Один из возможных подходов строится введением так называемого *стабилизирующего функционала* $\Omega(u)$. Он положителен, $\Omega(u) \geq 0 \quad \forall u \in V$, и непрерывен по V , так что точное решение u_* уравнения $Au = f$ принадлежит множеству V : $u_* \in V$. Тихонов доказал, что если функционал $\Omega(u, f)$ таков, что множество $\Omega(u) \leq d$ есть компактное подмножество V для любого $d > 0$, то перечисленных условий достаточно для того, чтобы стабилизирующий функционал

$$M_\alpha(u, f) = \|Au - f\|^2 + \alpha \Omega(u), \quad \alpha > 0, \quad (8.17)$$

имел единственное минимальное значение $\inf_{u \in V} M_\alpha(u, f)$ для произвольного положительного α и для всех $u_\alpha \in V$. Более того, при данных условиях справедливы теоремы 1 и 3 (см. [51]). Следовательно, выражение (8.17) дает более общий инструмент для построения устойчивого приближенного решения операторного уравнения первого рода $Au = f$ вследствие общей формы функционала $\Omega(u)$. Кроме того, эти результаты остаются справедливыми, если исходное пространство U не гильбертово, а лишь метрическое.

Следует заметить, что аналог теоремы 2 в этом более общем случае может быть получен сведением задачи минимизации к уравнению Эйлера, которое для данной задачи можно выписать в следующем виде:

$$A^*Au + \alpha \Omega'(u) = A^*f, \quad (8.18)$$

где $\Omega'(u)$ — производная Фреше функционала, которая совпадает с его градиентом.

Описанный подход весьма плодотворен при численном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$Au = f \sim \int_a^b K(x, \xi)u(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (8.19)$$

Рассмотрим данное операторное уравнение в банаховом пространстве непрерывных функций: $K(x, \xi) \in C[(a, b) \times (a, b)]$, $f(x) \in C(a, b)$; $A: C(a, b) \rightarrow C(a, b)$. В аспекте регуляризации Тихонова можем положить $V = W_2^1(a, b) \subset C(a, b) = U$. В таком случае норма в $W_2^1(a, b)$ может быть принята в качестве стабилизирующего функционала:

$$\Omega(u) = \|u\|_{2,1}^2 = \int_a^b [q_0 u^2(x) + q_1 u'^2(x)] dx, \quad q_0, q_1 > 0, \quad (8.20)$$

поскольку здесь множество $\Omega(u) \leq d$ — это сфера в $W_2^1(a, b)$, причем известно что она является компактом в $C(a, b)$ (см., например, [34, 51]). Здесь q_0, q_1 — некоторые положительные константы. Теперь становится ясно, что функционал (8.20) представляет собой обобщение $\Omega(u) = \|u\|_2^2$ в пространстве $L_2(a, b)$, так как при $q_1 = 0$ он сводится к норме в пространстве L_2 .

В рамках такого подхода уравнение Эйлера для вариационной минимизации сглаживающего функционала может быть построено в явном виде, так как

$$\delta\Omega(u) = 2 \int_a^b (q_0 u \delta u + q_1 u' \delta u') dx = 2 \int_a^b (q_0 u - q_1 u'') \delta u dx, \quad (8.21)$$

если зафиксировать значения неизвестной функции $u(x)$ на концах интервала (a, b) .

В итоге устойчивое решение уравнения (8.19) может быть найдено из уравнения Эйлера

$$\int_a^b K_1(x, \xi)u(\xi) d\xi + \alpha [q_0 u(x) - q_1 u''(x)] = f_1(x), \quad (8.22)$$

где

$$K_1(x, \xi) = \int_a^b K(t, x)K(t, \xi) dt, \quad f_1(x) = \int_a^b K(t, x)f(t) dt. \quad (8.23)$$

Необходимо заметить, что здесь $f_1 = A^*f$ и ядро в интегральном операторе в (8.23), очевидно, есть ядро оператора A^*A .

Скажем несколько слов о выборе малого параметра регуляризации α . Известно несколько подходов к данной проблеме [51]. Следующие два из них вполне естественны и весьма эффективны.

1. Если ошибка измерения для известной функции *входных данных* равна δ и эта величина априори известна из неких соображений, то это может эффективно помочь в оценке значения α вследствие оценки $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ (ср. выше). В самом деле, если начать решать уравнение (8.22) для относительно большого α , то решение u_α будет очень стабильным (как решение операторного уравнения с обратным оператором), но слишком далеким от точного решения u_* . Другими словами, отклонение $\|u_\alpha - u_*\|$ слишком велико и такой же будет невязка $\|Au_\alpha - f\|$. Если постепенно уменьшать α , то, согласно теореме 3, $u_\alpha \rightarrow u_*$ и, таким образом, благодаря непрерывности оператора A невязка $\|Au_\alpha - f\| \rightarrow 0$. Однако неразумно делать эту невязку меньшей, чем δ . Очевидно, хороший выбор α — это уменьшение данного параметра до тех пор, пока $\|Au_\alpha - f\|$ не станет сравнимым с δ .

2. Многочисленные реализации модельных примеров и задач показали, что весьма эффективен выбор, при котором

$$\alpha : \inf_{\alpha > 0} \left\| \alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right\|. \quad (8.24)$$

Эвристически это можно обосновать следующим образом. В процессе уменьшения параметра α , пока он еще не слишком мал, решение u_α слабо зависит от малого изменения значения α , так что величина $du_\alpha/d\alpha$ почти постоянна и значение $\alpha du_\alpha/d\alpha$ кажется относительно большим для такого большого α . С дальнейшим уменьшением α , при приближении к его экстремально малому значению решение u_α становится очень чувствительным к малым вариациям α и, следовательно, $du_\alpha/d\alpha$ становится очень большой. Оптимальный выбор α при этом должен соответствовать наименьшему значению произведения $\alpha du_\alpha/d\alpha$.

Следует заметить, что функция, для которой необходимо оценивать норму (8.24), определяется простым способом. Для пояснения этой идеи продемонстрируем данный метод в простом случае уравнения (8.15). Продифференцируем по α уравнение (8.15), где правая часть f_δ содержит некоторую ошибку δ :

$$A^*A \frac{du_\alpha}{d\alpha} + u_\alpha + \alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} = 0, \quad A^*A \left(\alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right) + \alpha \left(\alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right) = -\alpha u_\alpha. \quad (8.25)$$

Но из (8.15) имеем

$$-\alpha u_\alpha = A^* A u_\alpha - A^* f_\delta, \quad (8.26)$$

так что (8.25) принимает вид

$$A^* A \left(\alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right) + \alpha \left(\alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right) = A^* A u_\alpha - A^* f_\delta. \quad (8.27)$$

Таким образом, величина $\alpha du_\alpha/d\alpha$ может быть найдена из того же интегрального уравнения (8.15) с некоторой другой правой частью.

Примечания

1. Подход, примененный для исследования уравнения (8.19), остается весьма эффективным даже в предельно некорректном случае, когда интервал изменения переменной $x \in (c, d)$ отличен от (a, b) (на практике это бывает при $(c, d) \subset (a, b)$), случай довольно типичный во многих обратных задачах с весьма ограниченным объемом входных данных. Можно применить описанный подход также и в рассматриваемом случае, что приведет к уравнению, весьма схожему с уравнением (8.22):

$$\int_a^b K_1(x, \xi) u(\xi) d\xi + \alpha [q_0 u(x) - q_1 u''(x)] = f_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (8.28)$$

$$K_1(x, \xi) = \int_c^d K(t, x) K(t, \xi) dt, \quad f_1(x) = \int_c^d K(t, x) f(t) dt$$

2. Операция с соболевским гильбертовым пространством $W_2^1(a, b)$ кажется весьма естественной с точки зрения компактности в банаховом пространстве $C(a, b)$. Ясно, что любое множество непрерывных функций, производные которых равномерно ограничены некоторой константой, удовлетворяет теореме Арцела-Асколи (см. раздел 1.5).

8.3. Итерационные методы для уравнений первого рода

Как следует из результатов главы 1 (см. разделы 1.6 и 1.7), результаты о разрешимости в классическом смысле операторных уравнений первого рода обычно отсутствуют, в отличие от таковых для уравнений второго рода, для которых теория Фредгольма гарантирует, что в случае регулярных значений параметра λ оператор $(I - \lambda G)$ обратим и, таким образом, уравнение $u - \lambda G u = f$ разрешимо в данном случае по крайней мере для компактного оператора G . Некоторые результаты по разрешимости интегральных уравнений первого рода обсуждаются в разделе 1.7, но только для ядер свертки (т.е. когда ядро зависит только от разности его аргументов) и только для обобщенного (не классического) решения. Единственность подобных

уравнений также плохо изучена. Строгие (и достаточно понятные) результаты здесь следующие. Если A компактен в не конечномерном банаховом функциональном пространстве, то обратный оператор A^{-1} не существует (т. е. он не непрерывен).

С этой точки зрения неясно, как уравнение (8.1) может быть решено на практике каким-либо традиционным численным методом, и эффективный подход связан со схемой регуляризации Тихонова, изложенной в предыдущем разделе. Весьма неожиданно, что некоторые классические итерационные алгоритмы, хорошо известные в литературе по численным методам, автоматически обеспечивают сходимость итераций к точному решению, когда последнее существует и, возможно, даже не единственно.

Естественная идея построения подобного подхода основана на следующем наблюдении. Предположим, что мы знаем определенное приближение u_n точного решения u_* уравнения $Au = f$, где $A: H \rightarrow H$ — линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H . Вычислим невязку $\varphi(u) = \|Au - f\|^2$ элемента u_n

$$\varphi(u_n) = \|Au_n - f\|^2 = (Au_n - f, Au_n - f) \quad (8.29)$$

и попробуем найти направление, на котором данный квадратичный функционал убывает с максимально возможной скоростью. Известно, что оно определяется градиентом данного функционала (см. [24], а также раздел 8.2), который может быть определен из элементарной вариации $\delta\varphi$:

$$\begin{aligned} \delta\varphi(u) &= \delta(Au - f, Au - f) = 2(Au - f, \delta Au) = 2(A^*(Au - f), \delta u) \implies \\ &\implies \text{grad } \varphi(u) = 2A^*(Au - f), \end{aligned} \quad (8.30)$$

где A^* — оператор, сопряженный с A . Тогда следующий шаг итерации можно найти вдоль направления, обратного к вычисленному градиенту:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - \gamma \text{grad } \varphi(u_n) = u_n - \gamma A^*(Au_n - f) \sim \\ &\sim \xi_{n+1} = \xi_n - \gamma A^* A \xi_n, \quad \xi_n = u_n - u_*, \end{aligned} \quad (8.31)$$

где u_* — точное решение исследуемого уравнения

$$Au_* = f. \quad (8.32)$$

Очевидно, что ξ_n обозначает отклонение приближенного решения от точного. Вычислим его норму

$$\begin{aligned} (\xi_{n+1}, \xi_{n+1}) &= (\xi_n, \xi_n) - 2\gamma(\xi_n, A^* A \xi_n) + \gamma^2(A^* A \xi_n, A^* A \xi_n) \sim \\ &\sim \|\xi_{n+1}\|^2 = \|\xi_n\|^2 - 2\gamma\|A \xi_n\|^2 + \gamma^2\|A^* A \xi_n\|^2 \end{aligned} \quad (8.33)$$

и попробуем минимизировать его, насколько это возможно. Мы придем к простой минимизации квадратичного функционала, которая определяет значение $\gamma = \|A \xi_n\|^2 / \|A^* A \xi_n\|^2$. Следовательно, итерационная схема (8.31) имеет оптимальный вид

$$u_{n+1} = u_n - \frac{\|A\xi_n\|^2}{\|A^*A\xi_n\|^2} A^*(Au_n - f), \quad (8.34)$$

что эквивалентно

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{\|A\xi_n\|^2}{\|A^*A\xi_n\|^2} A^*A\xi_n, \quad \|\xi_{n+1}\|^2 = \|\xi_n\|^2 - \frac{\|A\xi_n\|^4}{\|A^*A\xi_n\|^2}. \quad (8.35)$$

Этот метод называется *методом наискорейшего спуска* (МНС).

Следующая теорема впервые была доказана в работе [56].

Теорема. Итерационный процесс (8.34) \sim (8.35) сходится монотонно к точному решению u_* уравнения $Au = f$.

Доказательство. Монотонное поведение сходимости следует из соотношения (8.35), которое показывает, что расстояние между приближенным и точным решениями уменьшается на каждом шаге итерационного процесса.

Для того чтобы доказать сходимость, вспомним некоторые классические результаты о геометрических свойствах гильбертовых пространств (см., например, [24]). Обозначим через $\{e_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, ортонормированный базис пространства H , построенный из собственных значений самосопряженного и положительного оператора A^*A : $A^*Ae_i = \beta_i e_i$, где β_i — его собственные значения, которые мы упорядочим по убыванию. Тогда любой элемент $x \in H$ может быть разложен в ряд по элементам его базиса:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \sim \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2, \quad A^*Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j e_j. \quad (8.36)$$

Перепишем (8.35) в следующей форме:

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{1}{\lambda_n} A^*A\xi_n, \quad \lambda_n = \frac{\|A^*A\xi_n\|^2}{\|A\xi_n\|^2}, \quad (8.37)$$

и заметим, что $0 \leq m \leq \lambda_n \leq \|A^*\| = \|A\| = M$.

Для дальнейшего рассуждения важно, равно ли m нулю или больше нуля. Приведем доказательство в случае $m > 0$. Доказательство для $m = 0$ строится схожим образом [56].

Итак, предположим, что $0 < m \leq \lambda_n \leq M$. Прежде всего заметим, что из (8.37) следует

$$(\xi_{n+1}, \xi_{n+1}) = (\xi_n, \xi_n) - \frac{(A\xi_n, A\xi_n)}{\lambda_n}. \quad (8.38)$$

Из последнего соотношения следует, что, во-первых, $\|\xi_n\|^2$ монотонно убывает при $n \rightarrow \infty$ (о чем уже упоминалось) и, во-вторых, что

$$\frac{\|A\xi_n\|^2}{\lambda_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8.39)$$

Так как $\lambda_n \leq M$, это подразумевает, что $\|A\xi_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Далее из разложения $\xi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_n^j e_j \quad \forall n = 1, 2, \dots$ следует, что

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \xi_n - \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_n^j \beta_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_n^j \left(1 - \frac{\beta_j}{\lambda_n}\right) e_j \sim \\ &\sim \xi_{n+1}^j = \xi_n^j \left(1 - \frac{\beta_j}{\lambda_n}\right) = \xi_0^j \prod_{i=0}^n \left(1 - \frac{\beta_j}{\lambda_i}\right). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Из последнего соотношения вытекает

$$\|\xi_n\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_n^j)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_0^j)^2 \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\beta_j}{\lambda_i}\right)^2. \quad (8.41)$$

Так как сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2$ означает, что $\beta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, следовательно, существует такой номер N , что $\beta_j \geq m$ для $j = 1, 2, \dots, N$ и $\beta_j \leq m$ для любого $j \geq N+1$. Разложим сумму в уравнении (8.41) на две

$$\begin{aligned} \|\xi_n\|^2 &= S_1 + S_2, \\ S_1 &= \sum_{j=1}^N (\xi_0^j)^2 \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\beta_j}{\lambda_i}\right)^2, \quad S_2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} (\xi_0^j)^2 \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\beta_j}{\lambda_i}\right)^2 \end{aligned} \quad (8.42)$$

и рассмотрим эти суммы отдельно. Имеем

$$S_2 \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} (\xi_0^j)^2, \quad (8.43)$$

так как для этих значений j

$$0 \leq \frac{\beta_j}{\lambda_i} \leq 1 \implies 0 \leq 1 - \frac{\beta_j}{\lambda_i} \leq 1. \quad (8.44)$$

Величину (8.43) можно сделать меньшей, чем произвольное малое значение $\varepsilon/2$, для достаточно большого N : $S_2 < \varepsilon/2$.

При оценке первой суммы S_1 возвращаемся к начальному представлению (8.41)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^N (\xi_n^j)^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\beta_j} \beta_j (\xi_n^j)^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N \beta_j (\xi_n^j)^2 = \frac{1}{m} (A^* A \xi_n, \xi_n) = \frac{1}{m} (A \xi_n, A \xi_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (8.45)$$

где последнее выражение можно сделать меньшим, чем малая величина $\varepsilon/2$, так как $\|A \xi_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

В случае если оператор A — положительный и самосопряженный, т. е. $(Au, v) = (u, Av)$ и $(Au, u) > 0 \forall u, v \in H$, теорема остается справедливой, когда итерационная формула применяется в менее сложной форме

$$u_{n+1} = u_n = \frac{\|A\xi_n\|^2}{(A\xi_n, A^2\xi_n)} Au_n, \quad \xi_n = u_n - u_*, \quad A\xi_n = Au_n - f, \quad (8.46)$$

что эквивалентно формулировке в книге [24].

Наиболее сложная задача здесь — оценка скорости сходимости, т. е. каково истинное поведение $\|\xi_n\| = \|u_n - u_*\|$ при $n \rightarrow \infty$. В общем случае единственная известная оценка здесь такова:

$$\varphi(u_n) = \|Au_n - f\|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (8.47)$$

и неизвестно никакой оценки для $\|u_n - u_*\|$.

Примечания

1. Обсуждаемый итерационный метод, определенный теоремой 1, представляет собой подход, альтернативный построению сглаживающего функционала Тихонова. Роль, аналогичную роли малого параметра регуляризации $0 < \alpha \ll 1$, играет здесь количество итераций $n \gg 1$.

Для обоснования этого утверждения предположим, что u_0 является решением основного уравнения $Au_0 = f$ и f_δ — приближенная (т. е. возмущенная) правая часть с $\|f - f_\delta\| < \delta$, где $\delta > 0$ — малая величина. Тогда точная форма МНС (8.34) \sim (8.35), выражающая $(n+1)$ -ю итерацию через предыдущую n -ю итерацию в виде некоторой конечной комбинации прямого оператора A , показывает, что для конечного числа итераций n разность $\|u_n^\delta - u_n\|$ можно сделать произвольно малой, когда $\|f - f_\delta\| \rightarrow 0$, т. е. итерационный процесс с конечным числом n гарантирует устойчивость к возмущениям правой части f .

2. Существенна разница между итерационной схемой и схемой регуляризации Тихонова. Если нужно решить операторное уравнение первого рода (8.1) с точной (т. е. невозмущенной) правой частью f , то итерации МНС могут дать приближение к точному решению с произвольной точностью. Для этого нужно лишь увеличивать число итераций. В отличие от нее схема регуляризации, в которой используется малый параметр сглаживания, не может обеспечить приближение к точному решению с произвольно малой погрешностью, так как регуляризирующее уравнение $(A^*A + \alpha I)u = f$ нельзя решить для слишком малого α .

8.4. Сравнение методов реконструкции геометрии рассеивателя

В последние годы отмечается рост интереса к обратным задачам рассеяния. Хороший обзор современного состояния данной области исследований можно найти в книге [75], где в основном разработана строгая и абстрактная математическая теория. В практическом аспекте интерес к обратным задачам объясняется разработкой приложений в радиолокации, акустике океана, медицинских и технических ультразвуковых исследованиях, сейсмических задачах и т. д. В настоящем разделе анализируются основные подходы к задаче реконструкции формы препятствия. При этом мы коснемся только тех работ, где:

1) авторы не используют каких-либо упрощающих гипотез (типа гипотез Кирхгофа), которые были предметом предыдущей главы 7;

2) представлены какие-либо примеры восстановления;

3) предложенный алгоритм достаточно общий и допускает применение к более сложным задачам. Следует также отметить, что мы интересуемся только теми алгоритмами, которые могут быть применены на практике.

Прежде всего заметим, что рассматриваемые задачи являются одновременно некорректными и нелинейными, что существенно усложняет их исследование.

По-видимому, подход, предложенный в работе [91], был первым, в котором авторы не прибегали к упрощающим предположениям. Если решается двумерное уравнение Гельмгольца во внешней области относительно некоторого акустически мягкого препятствия, то основная идея авторов состоит в следующем. Пусть диаграмма рассеяния $F(\varphi)$ известна в дальней зоне. Тогда коэффициенты Фурье a_m в разложении данной функции

$$F(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\varphi} \quad (8.48)$$

однозначно определяют рассеянное волновое поле в полярной системе координат в следующем виде:

$$p^{\text{sc}}(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m i^m H_m^{(1)}(k\rho) e^{im\varphi}, \quad (8.49)$$

где ряд сходится по крайней мере вне наименьшего круга C_0 , содержащего неизвестное препятствие. Так как полное давление равно нулю на граничном контуре l (вследствие граничных условий), то с уменьшением ρ первая точка, для которой выполняется $p^{\text{inc}} + p^{\text{sc}} = 0$, — это точка, принадлежащая границе объекта. Используя разные центры координат, в принципе можно восстановить некоторый набор граничных точек. Этот метод легко распространяется на случай акустически

твердого тела, так как очевидно, что для гладких граничных кривых $\partial p / \partial n = \partial p / \partial r$.

Несмотря на свою простоту и привлекательность данный метод имеет как минимум два недостатка:

1) его нельзя применить напрямую к реконструкции невыпуклых объектов. Для преодоления данного ограничения, авторы применяют метод последовательного продолжения рассеянного волнового поля. Подход родственен методу аналитического продолжения в теории аналитических комплекснозначных функций и состоит в многократном перераспределении ряда Фурье во все более расширяющейся области. Так же как и задача аналитического продолжения, эта проблема — одна из наиболее сложных некорректно поставленных задач;

2) сходимость ряда (8.49) во внешней относительно круга C_0 области не означает, что его сумму легко вычислить. Для реализации рассмотренного метода на практике необходимо вычислять сумму (8.49) для точек, очень близких к границе сходимости ряда, и неясно, какова скорость сходимости в подобных случаях. Вопрос тесно связан с классической гипотезой Рэлея: возможно ли продолжить ряд (8.49) внутрь C_0 , и если да, то как далеко? Например, известно, что для эллиптического препятствия в системе координат, связанной с его полуосями, граница сходимости ряда (8.49) проходит через его фокусы, расположенные на главной оси. Следовательно, для вытянутых эллипсов точка, для которой $p^{\text{inc}} + p^{\text{sc}} = 0$, располагается слишком близко к границе сходимости. Однако данная особенность является общим недостатком почти всех существующих методов реконструкции: они теряют свою эффективность для узких препятствий.

Авторы работы [76] предлагают интересный подход, который базируется на концепции функции Герглота. Функция Герглота — это целая функция (в смысле комплексного анализа), которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Авторы вводят определенный неотрицательный функционал, который обращается в нуль на истинном решении задачи. Так как рассматриваемая обратная задача некорректна, то предложенный численный алгоритм заключается в минимизации функционала на некотором компактном множестве. Для реализации алгоритма необходимо знать рассеянную амплитуду в дальней зоне на некотором интервале волнового числа $k \in (k_1, k_2)$, что на практике слишком проблематично. В последующих работах авторы преодолели данное ограничение [77].

В работе [97] предлагается метод, в котором рассеянное волновое поле ищется в виде потенциала простого слоя (ср. с разделом 2.1)

$$p^{\text{sc}}(x) = \int_C H_0^{(1)}(k|x-y|)\psi(y) ds_y \quad (8.50)$$

на некотором вспомогательном контуре C , расположенном внутри неизвестного препятствия, граница которого реконструируется. Формула

(8.50) приводит к следующему выражению для амплитуды рассеяния в дальней зоне:

$$F(\varphi) = \int_C e^{-ik(y_1 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi)} \psi(y) ds_y, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (8.51)$$

Если диаграмма рассеяния в дальней зоне $F(\varphi)$ известна, то уравнение (8.51) является линейным интегральным уравнением первого рода (которое некорректно) относительно функции $\psi(y)$, $y \in C$. Второй шаг предлагаемого метода — определение искомого граничного контура l , для которого $p^{\text{inc}} + p^{\text{sc}} = 0$, где p^{sc} определяется формулой (8.50). Ясно, что эффективность подобного подхода сильно зависит от выбора контура C .

Завершая обзор первых трех методов, заметим, что все они обладают существенным ограничением: поскольку используется тот или иной метод аналитического представления волнового поля, эти подходы нельзя напрямую распространить на случай, когда известна не полная волновая амплитуда в дальней зоне $F(\varphi)$, а лишь ее модуль $|F(\varphi)|$. В то же время задачи с заданным $F(\varphi)$ наиболее важны на практике.

Продолжим обсуждение методов, свободных от указанного недостатка.

Метод, предложенный в работах [61, 62], был протестирован на нескольких примерах. Волновое поле вне искомой области приближается конечным числом элементарных волн

$$p^{\text{sc}}(\rho, \varphi) = \sum_{m=-M}^M c_m i^m H_m^{(1)}(k\rho) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix}. \quad (8.52)$$

Выбранное аппроксимирующее представление решения априори удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию излучения. Единственное оставшееся условие, которому решение должно удовлетворить, — это граничное условие на контуре l : $(p^{\text{inc}} + p^{\text{sc}})|_l = 0$. Также требуется, чтобы рассеянное волновое поле совпадало с известной функцией $F(\varphi)$:

$$F(\varphi) = \sum_{m=-M}^M c_m i^{-m} \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (8.53)$$

Далее введением двух функционалов невязки

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \int_0^{2\pi} \left| F(\varphi) - \sum_{m=-M}^M c_m i^{-m} \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} \right|^2 d\varphi, \\ \Psi_2 &= \int_l \left| \sum_{m=-M}^M c_m i^m H_m^{(1)}(k\rho) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} + p^{\text{inc}} \right|^2 d\varphi \end{aligned} \quad (8.54)$$

задача сводится к минимизации функционала $\Psi = \Psi_1 + \sigma \Psi_2$ с определенным положительным параметром $\sigma > 0$. Так как исследуемая задача некорректна, то минимум Ψ ищется на компактном множестве.

На первый взгляд этот подход кажется весьма близким к методу [91]. Тем не менее здесь вопрос сходимости какого-либо ряда не важен. Разница такая же, как и между вопросом о сходимости степенного разложения какой-либо функции $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ на интервале $(0, L)$ и вопросом о приближении данной функции полиномом $f(x) \approx \sum_{m=0}^M a_m x^m$ на том же интервале.

Следует заметить, что рассмотренный метод обладает явным достоинством, так как при минимизации функционала Ψ не требуется многократно повторять решение прямой задачи рассеяния. Однако это достоинство метода является в то же время его недостатком по следующей причине. Пусть для задачи, где неизвестный объект облучен падающей волной, выбрано M слагаемых в уравнении (8.52) и такое же число слагаемых в разложении контура $\rho(\varphi)$. Тогда размерность соответствующей алгебраической системы, которая решается на каждом шаге итерации методом Левенберга–Маркварда (см., например, [81]) равна $2M$. Если в задаче присутствует N падающих волн, то общее количество коэффициентов c_m равно MN , и размерность соответствующей системы $(N+1)M$. Например, для $M = 20$ с одной падающей волной необходимо решить систему 40×40 , в то время как для 360 падающих волн (круговое сканирование с шагом 1°), систему 7220×7220 (ср. с методом, рассмотренным ниже в разделе 8.5). При этом прямая задача в такой ситуации требовала бы решения матричной системы 20×20 с 360 правыми частями, что гораздо проще при численной реализации.

Следует согласиться с тем, что в любой нелинейной задаче наиболее естественный путь — это применение метода Ньютона. Такой подход был реализован в работе [112], которая хронологически стала второй опубликованной работой после [91], где автор продемонстрировал примеры реконструкции неизвестной границы. Более конкретно, предложенный автором [112] метод состоит в следующем. Для известной диаграммы рассеяния в дальней зоне $F(\varphi)$ в случае акустически мягкого препятствия автор решает систему двух интегральных уравнений

$$F(\varphi) = \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-ik\rho(\theta) \cos(\varphi-\theta)} d\theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) H_0^{(1)}[kr(\varphi, \theta)] d\theta = e^{ik\rho(\varphi) \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (8.55)$$

где

$$r(\varphi, \theta) = [\rho^2(\varphi) + \rho^2(\theta) - 2\rho(\varphi)\rho(\theta)\cos(\varphi - \theta)]^{1/2},$$

относительно двух неизвестных функций: $g(\varphi)$, связанной с нормальной компонентой скорости на граничном контуре, и $\rho(\varphi)$, которая описывает границу неизвестной *звездной* области (область, ограниченная кривой, которая описывается в полярной системе координат однозначной функцией $\rho = \rho(\varphi)$). Пример — трехлепестковая область, показанная ниже на рис. 8.1, справа, если начало координат поместить в ее центре). Здесь падающая волна предполагается плоской.

Для численной реализации использован пошаговый метод, в котором на каждом шаге решается линеаризованная система. Полученные линейные системы также некорректны подобно полной задаче и поэтому изучаются с помощью регуляризации Тихонова. Этот подход очень быстрый в вычислительном смысле. Тем не менее у него есть существенный недостаток: вопрос сходимости метода Ньютона для некорректно поставленных задач плохо изучен в литературе и не совсем ясно, в каких случаях данный метод сходится. В связи с этим заметим лишь, что все известные оценки сходимости метода Ньютона применительно к нелинейным системам оперируют с нормой оператора, обратного к якобиану рассматриваемого операторного уравнения. Однако в некорректных задачах якобиан необратим.

В работе [127] метод Ньютона распространен на случай акустически твердой границы. Он также допускает облучение препятствия несколькими источниками с разными частотами. Основное отличие от метода [112] — в том, что для решения линейных систем на каждом итерационном шаге автор сначала вместо регуляризации Тихонова применяет сингулярное разложение соответствующей матрицы и потом пренебрегает ее малыми собственными значениями.

Авторы [100] применяют квазиньютоновский метод минимизации функционала, который соответствует сглаживающему функционалу Тихонова в процессе минимизации невязки исходной нелинейной системы. При этом в качестве оператора соответствующей прямой задачи авторы используют так называемый *T*-матричный подход [69].

Следует отметить хороший обзор различных методов решения обратных задач дифракционной теории в работе [11]. Кроме того, некоторые интересные подходы к обратным задачам дифракции были также предложены в работе [74]. В приложении к обратным задачам дифракции в упругих средах важные результаты получены авторами работ [13, 14], где читатель сможет найти также другие полезные ссылки.

Примечания

1. Отметим два ограничения, присущие всем рассмотренным выше подходам:

1) их возможности, как правило, на практике продемонстрированы только для двумерных задач. Переход от двумерной модели к насто-

ящему трехмерному случаю увеличивает количество неизвестных по крайней мере на порядок, что приводит к значительному росту времени вычислений;

2) они эффективны только для длинных или средних частот. Переход к реальному частотному режиму, где характерный размер препятствий очень часто на порядок больше длины волны, приводит к значительному возрастанию количества узлов сетки. Следовательно, с ростом частоты размерность соответствующих конечномерных линейных (или нелинейных) алгебраических систем становится слишком большой даже для современных компьютеров.

С учетом замечаний 1 и 2 можно сделать вывод, что для реальных практических потребностей общее число узлов сетки возрастает по крайней мере в $M = 50\text{--}100$ раз. Так как все перечисленные выше методы сводят изучаемую обратную задачу дифракции к некоторой (линейной или нелинейной) системе алгебраических уравнений, то это означает рост времени вычислений в $M^3 \sim 10^5\text{--}10^6$ раз.

2. Другой важный недостаток, присущий всем перечисленным методам (возможно, исключая работу [91]), — тот, что они восстанавливают границу только звездных областей. Работа с произвольными областями невозможна в рамках таких подходов, так как априори неясно, в каких интервалах изменения полярного угла функции $\rho = \rho(\varphi)$ неоднозначны. Для преодоления этой сложности, очевидно, должны быть разработаны другие методы.

8.5. Комбинация итераций и сглаживания

Как было отмечено в главе 7, обратная задача восстановления формы неизвестных препятствий по известной диаграмме рассеяния в рамках геометрической теории дифракции может быть сведена к задаче Минковского, которая достаточно известна в дифференциальной геометрии. По крайней мере для класса выпуклых препятствий она может быть численно изучена как корректная граничная задача, так как сводится к дифференциальному уравнению в частных производных для опорной функции и известно, что такая задача устойчива относительно малых возмущений данных.

В противоположность этому рассмотренные обратные задачи в точной формулировке сводятся (см. ниже) к системе нелинейных интегральных уравнений, причем основные из них — это уравнения Фредгольма первого рода с очень гладким (и, следовательно, очень «плохим») ядром. В первых трех разделах настоящей главы мы имели дело с некорректными задачами подобного типа, а здесь продемонстрируем, каким способом некоторые из методов, рассмотренных выше, можно применить к исследованию обратных задач реконструкции формы препятствий в точной формулировке.

Еще раз отметим, что обратные задачи математической физики изучались многими авторами. Хорошее современное изложение

с приложениями к обратным задачам дифракции представлено в монографии [75].

Пусть некоторая заданная волна p_0 падает на тело, расположенное в акустической среде. Ради простоты ограничимся двумерным случаем. Как обычно, падающая волна предполагается плоской и для определенности — распространяющейся вдоль горизонтальной оси, так что $p_0 = e^{ikx}$ (k — волновое число). Ограничимся классом звездных областей. Тогда параметрическое представление граничного контура l в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Для большей определенности предположим, что контур l — акустически мягкий. В этом случае граничные условия имеют вид $p|_l = 0$. Задача формулируется следующим образом. Известно поле, рассеянное на теле, для всех углов φ , т. е. известна функция

$$F(\varphi) = \int_l \exp[-ik\rho(\theta)\cos(\varphi - \theta)] \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_l dl, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

(см. главу 2 для выражения рассеянного волнового поля).

Необходимо определить функцию $\rho(\varphi)$. Предположим, что контур l — гладкий. Тогда $dl = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} d\theta$ и через функцию $g(\theta) = [\rho^2(\theta) + \rho'^2]^{1/2} dp(\theta)/\partial n|_l$ волновое поле выражается в виде

$$F(\varphi) = \int_0^{2\pi} \exp[-ik\rho(\theta)\cos(\varphi - \theta)] g(\theta) d\theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (8.56)$$

В данной задаче — две неизвестные функции $g(\theta)$ и $\rho(\theta)$. Следовательно, необходимо к (8.56) добавить некоторое соотношение. Например, это может быть граничное интегральное уравнение на контуре l (см. главу 2)

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) H_0[kr(\varphi, \theta)] d\theta = p_0|_l = \exp[ik\rho(\varphi)\cos\varphi], \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (8.57)$$

$$r(\varphi, \theta) = [\rho^2(\varphi) + \rho^2(\theta) - 2\rho(\varphi)\rho(\theta)\cos(\varphi - \theta)]^{1/2}.$$

Таким образом удается свести задачу к системе нелинейных интегральных уравнений (8.56), (8.57) для двух неизвестных функций $g(\theta)$ и $\rho(\theta)$.

Заметим, что исследуемая задача — простейшая обратная задача дифракции. В более сложных возможно задание не $F(\varphi)$, а лишь абсолютного значения $|F(\varphi)|$, и не для всех $0 \leq \varphi < 2\pi$. Далее направление падающего поля может быть нефиксированным.

Стоит снова подчеркнуть, что рассматриваемая проблема некорректна в смысле Тихонова. Это следствие того, что оператор прямой задачи $G: \rho(\varphi) \rightarrow F(\varphi)$ компактен в пространствах, естественным об-

разом связанных с рассматриваемой задачей, поэтому очевидно, как уже отмечено выше, что обратный оператор $G^{-1}: F(\varphi) \rightarrow \rho(\varphi)$ не может быть непрерывным. Все эти особенности усложняют решение, так как наиболее эффективные численные методы для некорректных задач разработаны в линейном случае.

Одним из наиболее универсальных методов является метод градиентного спуска (см. предыдущие разделы). В разделе 8.3 было показано, что в линейном случае (т.е. когда функционал невязки квадратичный) данный метод приводит к регуляризующему алгоритму. Хотя и не существует доказательства для общего случая, оказывается, что это свойство метода можно распространить и на нелинейные задачи. Это следует из того, что любой гладкий функционал квадратичен в окрестности локального минимума.

Алгоритм численного решения строится следующим образом. Прежде всего записывают соотношения (8.56) и (8.57) в конечномерной форме в узлах φ_i, θ_j ($\varphi_i = \theta_j$), используя простейшую квадратурную формулу прямоугольников. Узлы коллокации образуют регулярную сетку на интервале $(0, 2\pi)$. Диагональные члены в (8.57) (при $i = j$) должны быть вычислены как интеграл по малому интервалу части ядра, отвечающей главной особенности (эта особенность логарифмическая). При достаточно плотной сетке узлов нелинейная конечномерная система, полученная таким образом,

$$f_i(g_1, \dots, g_j, \rho_1, \dots, \rho_j) = 0, \quad i = 1, \dots, 2J, \quad (8.58)$$

имеет операторные свойства, схожие со свойствами, которыми обладает исходный вполне непрерывный оператор. В частности, некоторые собственные значения его якобиана весьма близки к нулю. Следовательно, при построении численного алгоритма необходимо помнить, что задача (8.58) на практике некорректна.

Возьмем функционал невязки $\psi(g, \rho) = \sum_{i=1}^J |f_i|^2$. На нулевом шаге находим минимум $\psi(g, \rho)$ на всех возможных окружностях. Предположим, что значения g^0, ρ^0 соответствуют найденной таким образом окружности. На следующем шаге применяется итерационная процедура градиентного спуска. Здесь (см., например, [81])

$$\text{grad } \psi = A^* f, \quad (8.59)$$

где A — якобиан системы (8.58), f — вектор его левой части, а звездочка обозначает сопряжение. Якобиан A в данной задаче может быть вычислен в явном виде. Таким образом, направление спуска задается равенством

$$q = -A^* f, \quad q = (\Delta g, \Delta \rho)^T. \quad (8.60)$$

Численная реализация показывает, что данный метод позволяет решить некоторые простые задачи. Например, удастся получить эллипс малого эксцентриситета из круга. Несмотря на это метод

сходится весьма медленно для более сложных задач, поэтому сходимость должна быть ускорена какой-либо подходящей процедурой. Обеспечить ускорение можно, заметив, что любое направление $g = -B \text{grad } \psi$ будет направлением спуска, если B — положительно определенная матрица. Для ускорения процедуры должна быть выбрана подходящая матрица B . С этой целью функционал ψ аппроксимируется квадратичным функционалом в точке $z = (g, \rho)$ [81]: $\psi(z + q) = \psi(z) + (A^*f, q) + \frac{1}{2}(q, Gq)$. Минимизация $\psi(z + q)$ генерирует направление (8.60) в линейном приближении. Минимизация $\psi(z + q)$ в квадратичном приближении приводит к соотношению $Gq = -A^*f$. В книге [81] показано, что гессиан $G \approx A^*A$ в окрестности своего минимума, так что это соотношение приближенно эквивалентно $A^*Aq = -A^*f$. С учетом (8.59) можно взять $(A^*A)^{-1}$ в качестве матрицы B . Однако, так как задача некорректна, у оператора A^*A нет обратного оператора (в смысле, определенном выше), поэтому мы используем идею, неявно связанную с регуляризацией Тихонова.

Добавим к оператору A^*A малый положительный оператор, например αI , $\alpha > 0$. Тогда получим

$$(A^*A + \alpha I)q = -A^*f. \quad (8.61)$$

Это равенство назначает определенное направление спуска. Таким образом, $B = (A^*A + \alpha I)^{-1}$ задано корректно. Очевидно, что (8.61) переходит в (8.60) для $\alpha \gg 1$.

Реализация этого алгоритма встречает естественное препятствие, потому что найти универсальный критерий для выбора параметра α — такого, который был бы подходящим для разных классов контуров l , не очень просто. Из нашего опыта оказывается весьма эффективным следующий способ. Выбираются несколько значений α_m ($m = 1, \dots, M$) такие, что они образуют геометрическую прогрессию в интервале $\alpha_{\min} = 10^{-4} < \alpha < 10^1$, и значения α_{opt} , для которых функционал ψ убывает наиболее быстро на соответствующем направлении q_{opt} . Естественно, что оптимальное значение α_{opt} , определенное таким образом, будет разным на различных шагах итерационной процедуры. Численные эксперименты показывают, что α_{opt} принимает большие значения на нескольких первых шагах и затем постепенно убывает на следующих шагах. Предел $\alpha > \alpha_{\min}$, который здесь принят, гарантирует устойчивость при вычислении матрицы $(A^*A + \alpha I)^{-1}$. Такой универсальный подход к выбору параметра α был использован во всех следующих примерах реконструкции граничного контура l .

Следует отметить, что система (8.58) переопределена. В самом деле, она содержит $3J$ действительных неизвестных: J значений $\{\text{Re } g_j, \text{Im } g_j, \rho_j\}$. В то же время в ней $4J$ вещественных уравнений. Предложенный подход допускает решение переопределенных систем. Например, количество неизвестных и уравнений будет одинаковым, если известна лишь вещественная амплитуда $|F(\varphi)|$ волны.

Некоторые примеры реконструкции определенных типов граничных контуров l методом, описанным в этом разделе, можно найти в работе [16].

Пусть тело с неизвестной границей l последовательно облучается плоскими волнами под разными углами γ_n , $n = 1, \dots, N$: $p_0^n = \exp[-ik\rho(\varphi)\cos(\varphi - \gamma_n)]$. Предположим, что амплитуда рассеянной волны известна для нескольких углов φ_i^n , $i = 1, \dots, I$, для каждой n -й падающей волны. Тогда задача в конечномерном виде сводится к нелинейной системе

$$f_i^n = \left| h \sum_{j=1}^J \exp[-ik\rho_i \cos(\varphi_i^n - \theta_j)] g_j^n \right|^2 - F_i^n = 0, \quad (8.62)$$

$$h \sum_{j=1}^J H_0[kr(\rho_i, \rho_j)] g_j^n = \exp[-ik\rho_i \cos(\varphi_i - \gamma_n)] \quad (h = 2\pi/J), \quad (8.63)$$

о которой следует помнить, что слагаемое для $i = j$ во втором равенстве требует аккуратной трактовки.

Систему (8.62), (8.63) можно решить методом, описанным выше. Тогда линейная система (8.61) для определения направления спуска станет системой из $(2N+1)J$ вещественных уравнений для такого же числа вещественных неизвестных $\text{Re } g_j^n$, $\text{Im } g_j^n$, ρ_j . В случае когда J и N велики, подход требует много времени для вычислений. Для снижения размерности воспользуемся двумя свойствами системы (8.63), трактуемой как система относительно g_j^n : она линейна относительно g_j^n ; при изменении n в этой системе изменяется только правая часть. Следовательно, можно свести задачу к минимизации функционала

$$\psi = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I |f_i^n|^2 \quad (8.64)$$

с условием (8.63), т. е. к проблеме условной оптимизации с ограничивающими условиями в форме равенств [81]. Как и выше, мы решаем эту проблему при помощи квадратичной аппроксимации функционала (8.64) относительно вектора приращения: $q = (\Delta g_j^n, \Delta \rho_j)^T = (x_V, x_U)^T$. Дифференцирование (8.63) дает соотношение

$$V_{x_V} + U_{x_U} = 0, \quad V = \begin{pmatrix} v & \dots & 0 \\ \dots & v & \dots \\ 0 & \dots & v \end{pmatrix}. \quad (8.65)$$

Здесь матрица V состоит из N идентичных матриц $v = (v_{ij})$, $v_{ij} = hH_0[kr(\rho_i, \rho_j)]$, расположенных на диагонали матрицы V . Матрица U может также быть переписана в явной, но более сложной форме.

Заметим, что матрица V соответствует прямой задаче дифракции, имеет доминирующую диагональ за счет логарифмической особенности ядра и, следовательно, устойчиво обратима.

Условная минимизация квадратичного функционала с ограничениями в форме (8.65) определяет уравнение (см. [81]):

$$(Z^* A^* A Z + \alpha I) \bar{q} = -Z^* A^* f, \quad (8.66)$$

где направление спуска определяется формулой $q = Z\bar{q}$. Здесь матрица Z имеет вид

$$Z = \begin{pmatrix} -V^{-1}U \\ I \end{pmatrix}, \quad (8.67)$$

вектор $f = (f_i^n)$ и A — якобиан системы (8.62). Оптимальное значение параметра α выбирается на каждом шаге тем же способом, что и в случае безусловной минимизации. Размерность системы (8.66) равна J .

На рис. 8.1 показаны примеры восстановления в случае, когда известна амплитуда обратного рассеяния для $N = 24$ направлений облучения, равномерно распределенных на интервале по углу $(0, 2\pi)$. При этом $I = 1$, $\varphi^n = \gamma_n$, и $J = 24$. Сплошные линии обозначают фактические граничные контуры, а штриховые соответствуют вычисленным.

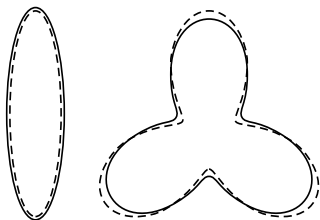


Рис. 8.1. Реконструкция эллиптического и трехлепесткового препятствий в акустической среде

Можно развить схожий подход в случае реконструкции полости неизвестной формы, находящейся в упругой среде. Пусть в упругой плоскости (двумерный случай) расположена полость с неизвестной границей, свободной от нагрузки. Волна, которая для большей определенности предполагается плоской, падает на эту полость справа налево, параллельно оси x_1 : $\sigma_{11}^0 = \sigma_0 \exp(-k_p x_1)$, где k_p , k_s — волновые числа, соотнесенные с продольной и поперечной волной соответственно. Для простоты предполагаем, что контур l является звездным, так что он может быть представлен в полярной системе координат однозначной функцией $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Задача состоит в восстановлении формы полости, т.е. функции $\rho(\varphi)$, по известной амплитуде рассеяния в дальней зоне. При этом прямая задача состоит в построении данной диаграммы при известной форме препятствия. Можно показать, что эта диаграмма представляется следующим интегралом (здесь μ и λ — модули упругости):

$$\sqrt{R} \sigma_{rr}(R, \varphi) \sim F(\varphi), \quad R \rightarrow \infty, \quad (8.68)$$

$$F(\varphi) = \int_0^{2\pi} e^{-ik_p \rho(\theta) \cos(\theta-\varphi)} \{u_1(\theta)[2\mu \gamma(\theta, \varphi) \cos \varphi + \lambda n_1(\theta)] + \\ + u_2(\theta)[2\mu \gamma(\theta, \varphi) \sin \varphi + \lambda n_2(\theta)]\} d\theta,$$

$$\gamma(\theta, \varphi) = n_1(\theta) \cos \varphi + n_2(\theta) \sin \varphi,$$

$$n_1(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta + \rho'(\theta) \sin \theta, \quad n_2(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta - \rho'(\theta) \cos \theta.$$

В рассматриваемой обратной задаче функция $F(\varphi)$ предполагается известной. Неизвестные величины в уравнении (8.68) — это $\rho(\theta)$ (так же как в скалярном акустическом случае), которая описывает граничный контур l , а также функции u_1, u_2 — компоненты вектора смещения на границе l в прямоугольной системе координат x_1, x_2 . Для того чтобы выписать полную систему уравнений, необходимо добавить к уравнениям (8.68), например, систему граничных интегральных уравнений (ГИУ) на контуре l . В этом разделе мы используем как в скалярной, так и в упругой задачах прямой метод ГИУ (ср. с разделом 2.2), в котором указанная система имеет вид

$$u_1(x) - 2 \int_l [P_1^{(1)}(y, x) u_1(y) + P_2^{(1)}(y, x) u_2(y)] dl_y = 2u_1^0(x), \\ u_2(x) - 2 \int_l [P_1^{(2)}(y, x) u_1(y) + P_2^{(2)}(y, x) u_2(y)] dl_y = 2u_2^0(x), \quad (8.69)$$

где

$$P^{(k)} = 2\mu \frac{\partial}{\partial n_y} [U^{(k)}(y, x)] + \lambda n_y \operatorname{div}_y [U^{(k)}(y, x)] + \\ + \mu \{n_y \times \operatorname{rot}_y [U^{(k)}(y, x)]\}, \quad x = x(\varphi), \quad y = y(\theta), \quad x \in l, \\ U_j^{(k)}(y, x) = \frac{i}{4\mu k_s^2} \left\{ k_s^2 \delta_{kj} H_0^{(1)}(k_p r) - \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} [H_0^{(1)}(k_p r) - H_0^{(1)}(k_s r)] \right\} \\ r = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho^2(\theta) - 2\rho(\varphi)\rho(\theta) \cos(\theta - \varphi)}. \quad (8.70)$$

Здесь, как обычно, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля, (u_1^0, u_2^0) — компоненты вектора смещения в падающей волне

$$u_1^0 = \frac{\sigma_0}{(\lambda + 2\mu) i k_p} e^{-ik_p x_1}, \quad u_2^0 = 0. \quad (8.71)$$

Следовательно, задача сводится к системе трех нелинейных интегральных уравнений (8.68), (8.69) относительно трех неизвестных функций ρ, u_1, u_2 .

Так как соотношение (8.68) для рассеянного волнового поля определяется интегральным уравнением первого рода с гладким ядром (что приводит к компактному интегральному оператору), то исследуемая задача, как и в скалярном случае, некорректна, поэтому необходима регуляризация. Здесь мы пользуемся подходом, схожим с разработан-

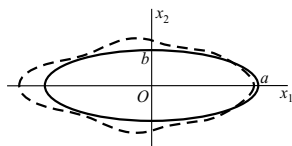


Рис. 8.2. Восстановление эллиптического дефекта с полуосями $ak_p = 1,6$, $a/b = 3$ в упругой среде

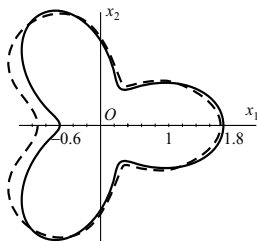


Рис. 8.3. Восстановление дефекта $k_p \rho(\varphi) = 0,6(2 + \cos 3\varphi)$ в упругой среде

ным для скалярного случая. Алгоритм прежний — минимизация функционала невязки для соотношений (8.68), (8.69) в функциональном пространстве $L_2(0, 2\pi)$. Минимизация опять проводится итерационным методом наискорейшего спуска, с помощью квадратичной аппроксимации на каждом шаге. Вспомним, что этот метод не совпадает ни с методом Левенберга–Маркварда, ни с регуляризующей схемой Тихонова (см. предыдущие разделы). При численной реализации можно записать уравнения (8.68), (8.69) в конечномерной форме, которая содержит значения величин ρ_i , u_{1i} , u_{2i} , φ_i , θ_j ($\varphi_i = \theta_i$), $i, j = 1, 2, \dots, N$, в узлах конечной сетки. Принципиальная сложность связана с вычислением якобиана полученной нелинейной конечномерной системы. Выражение для якобиана может быть выписано в явной форме, что уменьшает время вычислений почти на порядок по сравнению с вычислениями по конечно-разностной схеме.

На рис. 8.2–8.5 показаны примеры реконструкции различных дефектов в упругой среде. Здесь принято $c_p/c_s = 5,85/3,23$, что приблизительно соответствует стальной среде. Результаты показаны для полного количества узлов $N = 72$ и для числа итераций порядка 8–10.

Примечания

1. В случае акустически твердого контура, когда граничное условие имеет вид $\partial p / \partial n|_l = 0$, задача сводится к системе двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Тем не менее для применения метода, описанного выше, препятствий нет также и в этом случае.

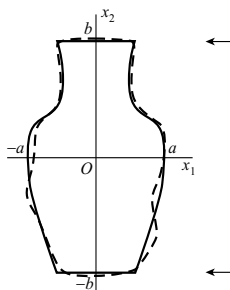


Рис. 8.4. Восстановление дефекта типа вазы с $ak_p = 0,9$, $bk_p = 1,5$ в упругой среде

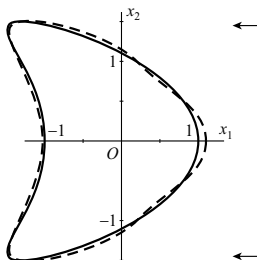


Рис. 8.5. Восстановление дефекта в виде маски в упругой среде:
 $k_px_1(t) = \cos t + 0,65(\cos 2t - 1)$,
 $k_px_2(t) = 1,5 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

2. Предложенный метод отличен от других известных методов — Гаусса–Ньютона и Левенберга–Маркварда [81], метода сглаживающего функционала [51] (см. также раздел 8.2) и других. В процедуре Левенберга–Маркварда, например, единичный шаг вдоль направления спуска всегда фиксирован. В методе сглаживающего функционала α не может зависеть от номера итерации (если итерационная процедура используется для минимизации сглаживающего функционала).

3. Метод, рассмотренный в настоящем разделе, на первый взгляд кажется совпадающим с методом, предложенным в [112] (см. краткий обзор в разделе 8.4), но это не так. А. Роджер использует метод Ньютона–Канторовича для решения нелинейного функционального уравнения, который, строго говоря, не сходится в случае операторного уравнения первого рода с компактным оператором (как линейным, так и нелинейным). В отличие от него наш подход основан на методе наискорейшего спуска, сходимость которого строго доказана (см. раздел 8.3) по крайней мере для квадратичного функционала невязки, соответствующего линейным операторным уравнениям. Локально

каждый функционал квадратичен, так что, хотя мы не можем доказать сходимость метода в нелинейном случае, однако исходя из доказанной сходимости для квадратичного функционала можно ожидать, что предложенный алгоритм сходится также и в более общем нелинейном случае, рассмотренном здесь.

8.6. Метод глобального случайного поиска в обратных задачах

Здесь мы предлагаем альтернативный подход решения некорректных задач, связанных с операторным уравнением первого рода

$$Au = f, \quad (8.72)$$

где A — компактный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H . Задача нахождения u при известной правой части f является обратной задачей. Как отмечено выше (см. также [51]), уравнение (8.72) представляет собой некорректную задачу по Тихонову в том смысле, что сильное изменение в решении u может соответствовать малому изменению в правой части. Это приводит к нестабильности основных численных методов, когда они применяются к уравнению (8.72) (см. предыдущие разделы).

Для преодоления этих трудностей были разработаны специальные численные методы. Один из возможных подходов базируется на идеях регуляризации уравнения (8.72) с помощью подходящего малого возмущения оператора A (раздел 8.2).

В настоящем разделе предлагается метод, ясный с физической точки зрения. Если приближения u_n выбираются произвольно, то можно оценить их близость к точному решению u^* , оценив функционал невязки

$$M(u_n) = \|Ax_n - f\|^2. \quad (8.73)$$

Однако, как отмечено выше (см. разделы 8.1 и 8.2), решение некорректного уравнения (8.72) не может быть сведено к минимизации функционала $M(u)$ (8.73). Вместо этого необходимо рассматривать сглаживающий функционал (см. раздел 8.2)

$$M_\alpha(u) = \|Au - f\|^2 + \alpha\Omega(u), \quad 0 < \alpha \ll 1. \quad (8.74)$$

Для минимизации функционала (8.74) мы используем метод глобального случайного поиска [23]. В отличие от прямого случайного поиска он обладает важными свойствами, которые позволяют ускорить процесс нахождения хорошего приближения u_n . Это достигается за счет того, что:

1) случайный выбор значений u_n в окрестности точек X , для которых значения $M_\alpha(X)$ меньше, встречаются чаще, чем в окрестности точек Y , где значения $M_\alpha(Y)$ больше;

2) области, в которых выбираются случайные значения u_n , постепенно стягиваются к малым окрестностям точек с малыми величинами $M_\alpha(u)$.

Этот алгоритм был протестирован на примерах минимизации конечномерных функций малого числа переменных. Здесь мы используем его для решения функциональных уравнений в гильбертовом пространстве.

В качестве модельного примера рассмотрим интегральное уравнение первого рода ($\rho = \text{const} > 0$)

$$Au = \int_0^{2\pi} \cos[\rho \cos(\varphi - \theta)] u(\theta) d\theta = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (8.75)$$

Его ядро бесконечно дифференцируемо, т.е. это уравнение крайне некорректно (по Тихонову). Будем искать его решение в форме ряда Фурье с конечным числом слагаемых

$$u(\theta) = \sum_{m=0}^M a_m \cos m\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (8.76)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда правая часть $f(\varphi)$ (так же как и ядро) является четной функцией φ . При таком подходе минимизация функционала (8.74) методом глобального случайного поиска, описанным выше, предполагает произвольную выборку наборов вещественных чисел $(a_0, a_1, \dots, a_m)_n$. Предлагается выбрать регуляризирующий функционал в форме (см. раздел 8.2)

$$\Omega(u) = \|u\|_{W_2^2(0, 2\pi)} \quad (8.77)$$

где W_2^2 — пространство Соболева, и основное пространство — это $H = L_2(0, 2\pi)$.

Результаты применения предложенного алгоритма для двух правых частей $f_1(\varphi) = 2\pi J_0(\rho)$ и $f_2(\varphi) = -2\pi J_2 \cos 2\varphi$ могут быть найдены в статье автора [48], где взяты значения $\rho = 1$, $M = 4$, $\alpha = 10^{-1} - 10^{-4}$. Число случайных выборок решения, определяющего число вычислений прямого оператора A , было взято равным $N = 300$.

Метод, описанный в этом разделе, особенно эффективен для задач, характеризующихся большим числом локальных минимумов функционала (8.74), так же как и большими значениями градиентов функционала. В подобных задачах практически невозможно найти глобальный минимум регулярными методами. Как показывает детальный анализ, задачи распознавания объекта из рассеянного им волнового поля имеют именно такие свойства.

При исследовании задачи восстановления граничного контура ограничимся для простоты двумерным случаем и простейшей моделью акустической среды, описываемой простым уравнением Гельмгольца.

Тогда задача сводится к системе двух нелинейных интегральных уравнений (см. предыдущие разделы)

$$\left| \int_l e^{ik(q \cdot x)} g(x) ds_x \right| = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (8.78)$$

$$\int_l H_0^{(1)}(k|x-y|)g(x) ds_x = e^{ik(q \cdot y)}, \quad y \in l, \quad q = -\{\cos \varphi, \sin \varphi\}. \quad (8.79)$$

Здесь k — волновое число, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля. В уравнениях (8.78) и (8.79) неизвестные величины — это функция $g(x)$, связанная с нормальной производной скорости, и функция $x \in l$, которая определяет положение граничного контура l (последний может быть задан, к примеру, в параметрической форме).

Результаты реконструкции двух объектов — эллипса с отношением полуосей 3 : 1 и полукруга диаметром 10 — по амплитуде кругового обратного рассеяния можно найти в работе [48]. В ней, как и в модельном примере, использовалось параметрическое представление контура l в форме конечного ряда Фурье в полярной системе координат с $M = 4$.

Примечания

1. Система (8.78), (8.79) адекватно описывает задачу в случае, когда амплитуда обратного рассеяния от объекта известна для всего интервала изменения угла сканирования $\varphi \in (0, 2\pi)$. Такой метод сканирования при совпадении направлений распространения падающей и отраженной волн соответствует эхо-методу, широко используемому в ультразвуковом тестировании, в радиолокации, в подводной акустике и многих других областях. В этом методе один и тот же ультразвуковой датчик используется как для излучения, так и для приема. При этом амплитуда отраженного сигнала $f(\varphi)$ известна, но фаза, как правило, остается неизвестной. Предполагается, что подобные измерения можно провести в принципе для любого угла падения $\varphi \in (0, 2\pi)$.

2. Прямая задача дифракции состоит в вычислении функции $f(\varphi)$ вдоль известного контура l . Необходимо сначала решить граничное интегральное уравнение (8.79) для функции $g(x)$, $x \in l$, потом вычислить квадратуру (8.78). Очевидно, что соответствующий оператор Au в (8.72) нелинеен. Таким образом, прямое действие нелинейного оператора сводится к решению одного линейного уравнения и вычислению одной квадратуры. Это типично для нелинейных обратных задач. В отличие от прямого обратный оператор A^{-1} (если он существует) сильно нелинеен. При использовании регулярных методов для обращения уравнения (8.72) необходимо вычислять производную Фреше оператора A , что достаточно сложно. Описанный здесь метод требует только вычисления прямого оператора (процедура, в которой используются лишь линейные операторы).

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.1. Метод наискорейшего спуска

Как было показано в главе 2, задачу дифракции в акустической среде можно свести к интегральным уравнениям, полученным из интегральной формулы Кирхгофа–Гельмгольца. В случае когда мы говорим о прямом методе ГИУ, задача Дирихле описывается уравнением первого рода, а задача Неймана — уравнением второго рода:

$$\int_S \psi(y) G(y_0, y) dS_y = F_1(y_0), \quad y_0 \in S, \quad (9.1)$$

$$p(y_0) - 2 \int_S p(y) \frac{\partial G(y_0, y)}{\partial n_y} dS_y = F_2(y_0), \quad y_0 \in S. \quad (9.2)$$

Здесь $\psi(y) = \partial p / \partial n_y$, p — дифрагированное давление на граничной поверхности S ; F_1 и F_2 — функции, выраженные в терминах граничных функций. Для большей определенности предположим, что поверхность замкнутая и при этом достаточно гладкая; нормаль n_y направлена во внешнюю относительно поверхности S область. Уравнения (9.1) и (9.2) описывают задачи как в двумерном, так и в трехмерном случаях. В этих задачах имеем соответственно

$$G(y_0, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad G(y_0, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = |y - y_0|. \quad (9.3)$$

Заметим, что уравнения (9.1), (9.2) могут быть выписаны также и для полного волнового поля. Это изменит лишь форму правых частей F_1 и F_2 . Как видно из предыдущих разделов, уравнения (9.1), (9.2) изучались довольно подробно и для решения подобных уравнений был разработан целый ряд аналитических и численных методов. Точные аналитические решения известны только для канонических областей (круг, сфера, эллипс, сегмент и т. д.). В высокочастотной области ($ka \gg 1$, a — характерный размер поверхности S) методы коротковолновой асимптотики эффективны для областей сложной формы. Основным недостатком численных методов — их оторванность от физической сути явлений. Кроме того, известно, что на предельно высоких частотах, т. е. для больших значений ka , численные методы теряют устойчивость. Здесь мы рассмотрим подход, в котором используется комби-

нация аналитических и численных методов. Аналитическое решение, полученное из теории Кирхгофа, принимается в качестве начального приближения для некоторого итерационного процесса. Такое асимптотическое решение эффективно лишь для $ka \gg 1$, а для меньших значений ka решение улучшается итерационным методом. Кроме того, будет показано, что каждый шаг предложенной процедуры уточняет выбранное аналитическое решение.

Выпишем рассмотренные уравнения (9.1), (9.2) в операторной форме

$$Bx = y \quad (9.4)$$

и рассмотрим линейный оператор B , действующий в некотором комплексном гильбертовом пространстве H , которое может быть выбрано как $L_2(S)$. Предположим, что оператор B — самосопряженный и положительный. Этого всегда можно достичь, представляя оператор B в форме A^*A , где A — оператор исходного интегрального уравнения. При этом $y = A^*f$, где f — правая часть исходного интегрального уравнения.

Пусть спектр оператора B лежит на интервале $[m, M]$, $0 \leq m < M$. Для уравнения первого рода всегда $m = 0$, что по сути следует из компактности интегрального оператора. В разделе 8.3 мы доказали, что если уравнение (9.4) имеет решение x^* , то итерационный метод наискорейшего спуска (МНС)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|Lx_n\|^2}{(Lx_n, BLx_n)} Lx_n, \quad Lx_n = Bx_n - y, \quad (9.5)$$

сходится монотонно к данному решению по норме выбранного пространства H . Это значит, что $\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|$. При этом если $m > 0$, то

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\|Lx_0\|}{m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n; \quad (9.6)$$

если $m = 0$, то

$$F(x_n) = (B(x_n - x^*), x_n - x^*) = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (9.7)$$

Легко продемонстрировать, что этот результат корректен, если вместо МНС используются родственные методы, которые могут быть выписаны в виде (см. раздел 8.3)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|Lx_n\|^2}{\|A^*Lx_n\|^2} A^*Lx_n \quad (A^*A = B), \quad (9.8)$$

или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(BLx_n, Lx_n)}{\|BLx_n\|^2} Lx_n. \quad (9.9)$$

Вспомним, что для сходимости МНС достаточно лишь существования решения x^* . Ниже мы воспользуемся этим фактом в случае, когда решение не единственно.

Численная реализация рассматриваемых итерационных процессов подразумевает замену интегрального оператора конечномерным. На практике при решении уравнений (9.1), (9.2) методом коллокаций приходим к линейной алгебраической системе $N \times N$. В (9.5) имеет место сходимость, однако даже в случае уравнения первого рода имеем $m > 0$, за исключением специальных указанных выше случаев, следовательно оценка (9.6) для скорости сходимости выполняется всегда. В то же время в случае когда интегральный оператор (9.1) приближается конечномерным оператором с большим количеством узлов N , конечномерный оператор является хорошей аппроксимацией исходного компактного оператора и, следовательно, $m/M \ll 1$. Отсюда вытекает, что матрица системы плохо обусловлена. Легко видеть, что сходимость здесь весьма медленная. В случае уравнения (9.2) счет на практике при $ak \gg 1$ показывает, что матрица соответствующей алгебраической системы также плохо обусловлена. С этой точки зрения в случае высокочастотных процессов уравнения второго рода не сильно отличаются своими качественными свойствами от уравнений первого рода.

В связи с этим задача ускорения МНС выглядит крайне важной. В литературе известны различные приемы ускорения итерационных методов. Здесь мы используем метод ускорения, который базируется на некоторых асимптотических свойствах МНС для больших n . В книге [45] показано, что при $n \rightarrow \infty$ итерационный процесс (9.5) обладает следующими свойствами:

$$\frac{F(x_n)}{F(x_{n-1})} = \frac{\|Ax_n - f\|^2}{\|Ax_{n-1} - f\|^2} = c^2, \quad (9.10)$$

$$x_n - x^* = c^2(x_{n-2} - x^*) \quad \left(c^2 = \frac{M-m}{M+m}\right). \quad (9.11)$$

Из (9.11) следует, что, когда МНС приближается к своей асимптотике, следующая итерация может быть выбрана в форме

$$\tilde{x} = \frac{x_n - c^2 x_{n-2}}{1 - c^2}, \quad (9.12)$$

где c^2 можно получить из (9.10). Использование подобного подхода в конкретных численных примерах показывает быстрое ускорение итерационного процесса для многих матричных уравнений, в том числе и плохо обусловленных ($m/M \ll 1$, $c^2 \sim 1$). Более подробно можно рассмотреть следующие свойства итерационного процесса. Для достаточно большого n процесс (9.5) приближается к своей худшей оценке в неравенстве (9.6), и асимптотическая зависимость (9.10) превращается практически в тождество. При таких условиях невязка $F(x_n)$ на каждом шаге убывает в c^2 раз, следовательно, для плохо обусловленных задач с $c^2 \sim 1$ она убывает очень медленно. Тем не менее выполнение расчета по формуле (9.12) на одном шаге устраняет эту цикличность

и далее процесс (9.5) сходится гораздо быстрее. Эти свойства хорошо видны ниже из таблицы, построенной для первого из рассмотренных выше примеров.

Вспомним, что уравнение первого рода (9.1) некорректно в смысле Тихонова, поэтому итерационный процесс (9.5) определяет некоторое семейство регуляризующих операторов R_n для уравнения (9.1).

В самом деле, итерационный процесс на каждом шаге определяют некоторый нелинейный оператор $x_n = R_n y$, и для вычисления R_n требуется применение конечного числа операторов для каждого конечного значения n . Данное свойство R_n и сходимость процесса МНС (9.5) доказывают, что R_n — регуляризующий оператор.

Известно (см. главу 2), что для замкнутой поверхности S существуют значения параметра $k = k_j$ ($j = 1, 2, \dots$), при которых операторы соответствующих уравнений (9.1), (9.2) необратимы. Подобное имеет место на частотах, которые соответствуют резонансам соответствующей внутренней задачи. Некоторые авторы использовали различные методы для преодоления данной трудности. Здесь мы покажем, что наш подход позволяет автоматически обходить это препятствие. В книге [26] доказано, что для уравнения (9.1) на критических частотах k_j правая часть всегда ортогональна решениям однородного уравнения. Также доказано, что при таких условиях уравнение (9.1) разрешимо (не единственным образом) для любой граничной функции в задаче Дирихле и волновое поле, вычисленное на основе этого решения, определяется единственным образом. Так как решение уравнения (9.1) существует, метод гарантирует сходимость итерационного процесса к определенному решению (в случае неединственного решения). Это значит, что предложенный метод определяет стабильное решение задачи Дирихле также и на критических частотах.

Кроме того, хорошо известно, что непрямой метод ГИУ позволяет свести задачу Дирихле к интегральному уравнению второго рода (см. главу 2). Но в этом разделе мы не пользуемся подобной возможностью, так как в данном случае на критических значениях правая часть не ортогональна решениям сопряженного однородного уравнения.

Следует также отметить, что если размер комплексной матрицы при дискретизации уравнений (9.1), (9.2) равен $N \times N$, то решение матричного уравнения любым прямым методом требует N^3 арифметических операций. В то же время один шаг процесса (9.5) требует порядка N^2 операций. При больших ka для адекватного описания волнового поля на граничной поверхности требуется значительно большее число узлов N . В подобных условиях МНС работает гораздо стабильнее с вычислительной точки зрения.

Таким образом, в нашем подходе мы по существу используем две особенности:

- 1) ускорение МНС, которое при практической реализации позволяет достичь быстрой сходимости;

2) обход этим методом некоторых классических сложностей, связанных с наличием критических частот в задаче Дирихле.

В целях проверки эффективности предложенного метода были исследованы следующие примеры.

Прежде всего мы протестировали предложенный подход для двумерной задачи дифракции плоской волны на твердом круглом диске при $ka = 5$ и количестве узловых точек $N = 72$. Для таких умеренных волновых частот применение теории Кирхгофа неэффективно в качестве первого шага. Предложенный метод позволяет улучшить эту теорию. Скорость сходимости МНС без ускорения и с ускорением при помощи формулы (9.12) после каждых 10 итераций сравниваются в приведенной ниже таблице.

n	$F(x_n)$	c^2	$F^*(x_n)$	n	$F(x_n)$	c^2	$F^*(x_n)$
1	$2,61 \cdot 10^0$	0,293	$2,61 \cdot 10^0$	16	$5,27 \cdot 10^{-3}$	0,9271	$1,92 \cdot 10^{-4}$
2	$7,67 \cdot 10^{-1}$	0,332	$7,67 \cdot 10^{-1}$	17	$4,89 \cdot 10^{-3}$	0,9271	$1,42 \cdot 10^{-4}$
3	$2,54 \cdot 10^{-1}$	0,377	$2,54 \cdot 10^{-1}$	18	$4,53 \cdot 10^{-3}$	0,9271	$1,19 \cdot 10^{-4}$
4	$9,63 \cdot 10^{-2}$	0,430	$9,63 \cdot 10^{-2}$	19	$4,20 \cdot 10^{-3}$	0,9272	$1,07 \cdot 10^{-4}$
5	$4,14 \cdot 10^{-2}$	0,523	$4,14 \cdot 10^{-2}$	20	$3,89 \cdot 10^{-3}$	0,9272	$9,76 \cdot 10^{-5}$
6	$2,17 \cdot 10^{-2}$	0,649	$2,17 \cdot 10^{-2}$	21	$3,61 \cdot 10^{-3}$	0,9272	$8,06 \cdot 10^{-5}$
7	$1,41 \cdot 10^{-2}$	0,776	$1,41 \cdot 10^{-2}$	22	$3,35 \cdot 10^{-3}$	0,9273	$4,57 \cdot 10^{-6}$
8	$1,09 \cdot 10^{-2}$	0,856	$1,09 \cdot 10^{-2}$	23	$3,11 \cdot 10^{-3}$	0,9273	$3,35 \cdot 10^{-7}$
9	$9,36 \cdot 10^{-3}$	0,901	$9,36 \cdot 10^{-3}$	24	$2,88 \cdot 10^{-3}$	0,9273	$5,72 \cdot 10^{-8}$
10	$8,44 \cdot 10^{-3}$	0,917	$8,44 \cdot 10^{-3}$	25	$2,67 \cdot 10^{-3}$	0,9273	$3,30 \cdot 10^{-8}$
11	$2,48 \cdot 10^{-3}$	0,924	$1,93 \cdot 10^{-2}$	26	$2,48 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$2,63 \cdot 10^{-8}$
12	$7,15 \cdot 10^{-3}$	0,925	$6,10 \cdot 10^{-3}$	27	$2,29 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$2,31 \cdot 10^{-8}$
13	$6,62 \cdot 10^{-3}$	0,926	$2,03 \cdot 10^{-3}$	28	$2,13 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$2,09 \cdot 10^{-8}$
14	$6,14 \cdot 10^{-3}$	0,926	$7,33 \cdot 10^{-4}$	29	$1,97 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$1,91 \cdot 10^{-8}$
15	$5,69 \cdot 10^{-3}$	0,927	$3,31 \cdot 10^{-4}$	30	$1,83 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$1,72 \cdot 10^{-8}$

Здесь c^2 вычисляется как в (9.10), n — количество итераций, $F(x_n)$ — значение функционала невязки без ускорения, $F^*(x_n)$ — аналогичные значения функционала с применением предложенного метода ускорения. Из таблицы видна стабилизация параметра c^2 , что согласуется с описанными асимптотическими свойствами МНС. Также видно, что значение c^2 близко к 1, и это связано с плохой обусловленностью матрицы, которая приводит к медленной сходимости процесса (без ускорения). В то же время ускорение делает процесс сходящимся быстрее: значение невязки уменьшается на 8 порядков по сравнению с первым шагом итерации.

Далее мы продолжили тестирование эффективности предлагаемого подхода рассмотрением дифракции двумерной плоской акустической волны на твердом эллипсе. Здесь $ka = 5$, $kb = 0,5$ ($a/b = 10$), $N = 180$. Известно, что для вытянутых тел эффективность метода ГИУ значительно снижается. Это происходит из-за того, что расчеты для подобных тел требуют очень большого числа узлов N . Кроме того,

проведенные вычисления показывают, что, хотя плохая обусловленность матрицы соответствующей алгебраической системы становится для удлиненных тел еще более выраженной, предложенный метод эффективен и в этом случае.

Далее мы рассмотрели задачу о дифракции плоской волны на мягком цилиндре с $ka = 3,8317$, что соответствует внутреннему резонансу. Осуществление МНС с вышеуказанным ускорением позволяет эффективно получить решение также и в этом случае. Более подробно, с рисунками и таблицами, эти результаты представлены в работе [21].

Примечание. Мы также протестировали некоторые простые геометрии для чрезвычайно высоких частот. Это актуально в свете сравнения между приближенным решением Кирхгофа и результатами прямого численного расчета. Первая изученная задача относится к круглому акустически твердому цилиндру при $ka = 20$, $N = 180$. При этом решение, предсказанное геометрической теорией дифракции, имеет вид

$$F(\varphi) = \frac{\sqrt{\pi ka}}{2} \sqrt{|\sin \varphi / 2|}. \quad (9.13)$$

Результаты вычислений [21] показывают высокую точность асимптотического решения в зоне света и плохую — в теневой области.

Далее мы рассмотрели пример с высокой частотой ($ka = 50$) для изучения дальнейшего роста параметра частоты. При этом для адекватного описания задачи необходимо взять по крайней мере $N = 400$. Алгебраическая (комплекснозначная) система 400×400 решалась методом Гаусса, но какой-либо разумный результат получен не был. Реализация МНС с 20 итерациями и с ускорением после каждых пяти итераций уменьшает невязку на четыре порядка и дает стабильный результат. Сравнение с асимптотическими результатами показывает, что и в этом случае асимптотическая теория приводит к большой погрешности в зоне тени.

9.2. Метод Галеркина для слабосингулярных уравнений первого рода

Из качественного анализа интегральных уравнений первого рода следует, что стабильность их численного решения зависит от скорости асимптотического убывания собственных значений ($\lambda_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$) рассматриваемого интегрального оператора, так же как и от асимптотического поведения коэффициентов разложения правой части по собственным функциям. Если ядро положительно и симметрично, то спектр $\{\lambda_n\}$ также положителен и собственные функции образуют полный набор ортогональных функций. Как следует из результатов [87], менее регулярные ядра порождают спектр $\{\lambda_n\}$, в котором $\lambda_n \rightarrow 0$ убывают с ростом n медленнее. Следовательно, появляется хороший шанс

разработать стабильный численный метод для интегральных уравнений первого рода с ядрами, содержащими слабую особенность.

Начнем с характеристического уравнения с периодическим логарифмическим ядром

$$\begin{aligned} - \int_{-\pi}^{\pi} u(\xi) \ln \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right| d\xi &= f(x), \quad |x| \leq \pi, \sim \\ &\sim K_0 u = f, \quad K_0(x, \xi) = - \ln \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right|. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Если для простоты считать $f(x)$ четной, $f(-x) = f(x)$, то можно легко доказать, что решение уравнения (9.14) также четно. Спектр оператора (9.14) может быть напрямую определен из табличного ряда [20]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-\xi)}{n} = \ln \left| 2 \sin \frac{x-\xi}{2} \right|, \quad |x| \leq \pi. \quad (9.15)$$

Следовательно, набор собственных функций оператора K_0 — это $\{\varphi_n(x)\} = \{\cos nx\}$, $n = 0, 1, \dots$, так как для $n = 0$ имеем [20]

$$\begin{aligned} K_0 \varphi_0 &= - \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right| d\xi = - \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin \frac{\xi}{2} \right| d\xi = \\ &= -2 \int_0^{\pi} \ln \left(\sin \frac{\xi}{2} \right) d\xi = -4 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \xi) d\xi = 2\pi \ln 2, \end{aligned} \quad (9.16)$$

где мы воспользовались следующим свойством периодических функций: значение интеграла любой периодической функции, взятого по интервалу длиной в один период, остается без изменений, если произвольно сдвинуть интервал интегрирования, не меняя его длины.

Для других $n = 1, 2, \dots$ из уравнения (9.15) напрямую следует, что

$$\begin{aligned} K_0 \varphi_n &= - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\xi) \ln \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right| d\xi = - \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\xi \ln \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right| d\xi = \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\xi) \cos[m(x-\xi)] d\xi = \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\xi) \cos(m\xi) d\xi = \\ &= \frac{\pi}{n} \cos(nx) = \frac{\pi}{n} \varphi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.17)$$

т.е. $\{\varphi_n\}$ — действительно собственные функции оператора K_0 с собственными значениями $\lambda_0 = 2\pi \ln 2$, $\lambda_n = \pi/n$, $n = 1, 2, \dots$.

Теперь разрешимость уравнения (9.14) зависит только от аналитических свойств правой части $f(x)$. Если $f(x) \in C_3(-\pi, \pi)$, то

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \pi n x dx = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (9.18)$$

как следует из асимптотических оценок раздела 1.4. Тогда точное решение интегрального уравнения (9.14) может быть напрямую выражено в виде ряда по собственным функциям

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(n x), \quad u_n = \frac{f_n}{\lambda_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (9.19)$$

который равномерно сходится на интервале $x \in [-\pi, \pi]$.

В случае полного интегрального уравнения Фредгольма первого рода, периодическое ядро которого содержит слабую логарифмическую особенность:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [K_0(x - \xi) + K_1(x, \xi)] u(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq \pi, \quad (9.20)$$

$$K_0(x - \xi) = -\ln \left| \sin \frac{x - \xi}{2} \right|,$$

где $f(x)$ и $K_1(x, \xi)$ четны по своим аргументам и $K_1(x, \xi)$ в некотором смысле регулярна, можно снова искать решение уравнения (9.20) в форме разложения по собственным функциям ядра $K_0(x - \xi)$

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \varphi_m(x), \quad \varphi_m(x) = \cos(mx). \quad (9.21)$$

Тогда применение стандартного метода Галеркина (см., например, [79]) подразумевает подстановку представления (9.21) в уравнение (9.20):

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m \int_{-\pi}^{\pi} [K_0(x - \xi) + K_1(x, \xi)] \varphi_m(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq \pi, \quad (9.22)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m \left[\lambda_m \varphi_m(x) + \int_{-\pi}^{\pi} K_1(x, \xi) \varphi_m(\xi) d\xi \right] = f(x), \quad |x| \leq \pi,$$

и скалярное умножение уравнения (9.22) на те же базисные функции. В результате приходим к бесконечной системе линейных алгебраиче-

ских уравнений

$$u_n + \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} u_m = f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.23)$$

где

$$a_{nm} = \frac{\delta_n}{\lambda_n} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_1(x, \xi) \varphi_n(x) \varphi_m(\xi) d\xi \quad (n, m = 0, 1, \dots),$$

$$f_n = \frac{\delta_n}{\lambda_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi_n(x) dx, \quad \delta_n = \begin{cases} 1/2\pi, & n = 0, \\ 1/\pi, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9.24)$$

Здесь следует вспомнить некоторые классические результаты из теории регулярных бесконечных линейных алгебраических систем.

Определение 1. Система (9.23) называется *регулярной*, если $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < 1 \quad \forall n = 0, 1, \dots$.

В книге [25] показано, что регулярные системы имеют единственное ограниченное решение, если $|f_n| \leq K \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}|\right)$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и K одинаково для всех n .

Определение 2. Система (9.23) называется *вполне регулярной*, если $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \theta < 1 \quad \forall n = 0, 1, \dots$, где константа θ — одна и та же для всех n .

В [25] доказано, что вполне регулярные системы обладают единственным ограниченным решением, если f_n равномерно ограничены. Системы могут быть решены также численно методом усечения, который трактуется следующим образом. Пусть рассматриваемая усеченная система имеет вид

$$v_n + \sum_{m=0}^N a_{nm} v_m = f_n, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (9.25)$$

Тогда для всех $n = 0, 1, \dots$ решение v_n этой системы стремится к u_n при $N \rightarrow \infty$.

Определение 3. Система (9.23) называется *квазивполне регулярной*, если для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \infty$ и $\exists M$ такое, что $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \theta < 1$ для всех $n \geq M$.

Доказано, что подобная система однозначно разрешима, если однозначно разрешима конечная система (9.25), образованная первыми M уравнениями, и если f_n равномерно ограничены. При таких

условиях данная бесконечная система может быть решена численно методом усечения.

Покажем, что наша система, полученная применением метода Галеркина к интегральному уравнению Фредгольма первого рода со слабой логарифмической особенностью, квазивполне регулярна, если регулярная часть ядра достаточно гладкая. Точнее говоря, это утверждение справедливо, если по крайней мере $K(x, \xi) \in C_2[(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)]$ и $f(x) \in C_1(-\pi, \pi)$, поскольку асимптотические оценки в разделе 1.4 дают здесь $a_{nm} = O(1/n^2 m^2)$, $n, m \rightarrow \infty$, и $f_n = O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$.

В самом деле, при подобной оценке $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| = O(1/n^2)$ — величина, которая может быть сделана меньше, чем θ , $0 < \theta < 1$, начиная с некоторого $n \geq M$. Более того, величины f_n равномерно ограничены.

Из приведенного рассуждения можем окончательно заключить, что полное уравнение Фредгольма первого рода (9.20) со слабой логарифмической особенностью в ядре можно эффективно решать методом Галеркина, который сводит задачу к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом усечения.

Перейдем теперь к уравнениям первого рода с логарифмическими, но не периодическими ядрами. Здесь характеристическое уравнение

$$-\int_{-1}^1 \ln|x-\xi| u(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq 1, \quad G_0 u = f, \quad (9.26)$$

$$G_0(x, \xi) = -\ln|x-\xi|,$$

и собственные функции могут быть построены на основе следующего табличного интеграла [20]:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|x-\xi| d\xi = \begin{cases} \pi \ln 2, & n = 0, \\ \frac{\pi}{n} T_n(x), & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (9.27)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — полином Чебышева порядка n [1]. Отсюда следует, что ортогональный базис, образованный собственными функциями, — это $\{\varphi_n(x)\} = \{T_n(x)/\sqrt{1-x^2}\}$ и соответствующие собственные значения $\lambda_n = \pi/n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\lambda_0 = \pi \ln 2$. Данное утверждение основано на свойстве ортогональности собственных функций, образованных самосопряженным оператором. В нашем случае ключевую роль играет другой табличный интеграл, который представляет собой соотношение ортогональности (δ_{nm} — символ Кронекера)

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \varepsilon_n \delta_{nm}, \quad \varepsilon_0 = \pi/2, \quad \varepsilon_n = \pi. \quad (9.28)$$

Соотношения (9.27) и (9.28) дают точное представление решения уравнения (9.26) в виде

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \varphi_m(x), \quad \varphi_m(x) = \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (9.29)$$

в полном соответствии с теоретическими результатами, полученными в разделе 1.7, для структуры решения уравнения (9.26). Заметим, что представление (9.29) содержит особенность в виде квадратного корня на концах интервала $(-1, 1)$.

Подстановка ряда (9.29) в (9.26) с учетом соотношения (9.27) приводит к явному выражению для неизвестных коэффициентов

$$u_n = \frac{f_n}{\varepsilon_n \lambda_n}, \quad f_n = \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (9.30)$$

Теперь сходимость ряда (9.29) связана с асимптотической оценкой f_n при $n \rightarrow \infty$. Последняя зависит от аналитических свойств правой части $f(x)$. Если эта функция по крайней мере дважды дифференцируема: $f(x) \in C_2(-1, 1)$, то

$$f_n = \int_0^{\pi} \tilde{f}(t) \cos(nt) dt, \quad x = \cos t, \quad \tilde{f}(t) = f(\cos t). \quad (9.31)$$

Снова рассматривая для простоты лишь четные правые части, получаем

$$f_n = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) \cos(nt) dt = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (9.32)$$

вследствие периодичности (см. раздел 1.4). При этом из (9.30) следует

$$u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (9.33)$$

так что для подобных функций $f(x)$ ряд равномерно сходится на интервале $(-1, 1)$.

Полное уравнение в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_{-1}^1 [G_0(x - \xi) + G_1(x, \xi)] u(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (9.34)$$

где мы для простоты ограничили рассмотрение только четными $f(x)$ и четными $G_1(x, \xi)$ (относительно обоих аргументов). Неизвестную

функцию $u(x)$ можно искать снова в виде ряда по собственным функциям

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \varphi_m(x), \quad \varphi_m(x) = \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (9.35)$$

Тогда подстановка данного представления в уравнение (9.34) и применение скалярного произведения с $\varphi_n(x)$ приводит к бесконечной алгебраической системе второго рода

$$u_n + \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} u_m = f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.36)$$

где

$$b_{nm} = \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{T_m(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} G_1(x, \xi) d\xi, \quad (9.37)$$

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

По аналогии со случаем с периодическим ядром напрямую доказывается, что система (9.36) квазивполне регулярна, если $f(x) \in C_2(-1, 1)$ и $G_1(x, \xi) \in C_2[(-1, 1) \times (-1, 1)]$. Следовательно, метод усечения может быть использован для численного решения этой системы.

Примечание. Описанный метод является альтернативным весьма эффективному методу коллокации [17]. Каждому из них присущи свои достоинства и недостатки. Так, метод коллокации требует решения конечномерной алгебраической системы в отличие от метода, рассмотренного в настоящем разделе. Однако вопрос о его сходимости для интегральных уравнений с логарифмической особенностью — более сложный. При нашем подходе необходимо решать бесконечную алгебраическую систему методом усечения. Однако сходимость такого метода при этом обосновывается более наглядно.

9.3. Физическая теория дифракции для невыпуклых отражателей

В разделе 2.6 было показано, что в случае высоких частот и выпуклого препятствия физическая теория дифракции Кирхгофа способна асимптотически предсказать значение неизвестного давления на граничной поверхности (или на контуре в двумерном случае). Здесь мы расширим некоторые идеи физической теории дифракции, применяя граничные интегральные уравнения к коротковолновой дифракции на препятствии с произвольной гладкой границей. Предпосылка нашего

подхода связана со специфическими характерными чертами взаимодействия падающей волны с выпуклыми и вогнутыми частями границы. По существу, акустические лучи, падающие на выпуклые части границы, не могут участвовать в повторяющихся переотражениях. И наоборот, лучи, падающие на любую вогнутую часть, могут переотразиться только между точками этой части и никогда не падают на какую-либо выпуклую часть границы. Мы продемонстрируем все идеи в двумерном случае, трехмерный случай может быть исследован схожим образом.

Пусть плоская падающая волна падает на препятствие с гладким граничным контуром l (рис. 9.1).

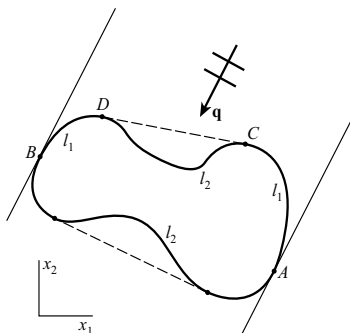


Рис. 9.1. Падение плоской акустической волны на невыпуклое препятствие

Сформулируем задачу одновременно для скалярной и упругой задач. Если граничный контур свободен от нагрузки, тогда (для большей определенности) в скалярном случае акустически мягкой границы имеем $p|_l = 0$, а в упругом случае $\mathbf{T}|_l = (T_1, T_2)|_l = 0$, где p — акустическое давление, \mathbf{T} — вектор напряжений в скалярной и упругой задачах соответственно. Тогда в рамках прямого метода граничное интегральное уравнение в скалярной задаче имеет вид (см. главу 2)

$$\frac{i}{4} \int_l H_0^{(1)}(kr) g(y) dl_y = p_0(x) = e^{ik(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}, \quad g(y) = \left. \frac{\partial p}{\partial n_y} \right|_l, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \mathbf{x} \in l, \quad (9.38)$$

где k — волновое число; \mathbf{q} — единичный вектор, определяющий направление падающей волны; $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля.

Для упругой среды вместо одного уравнения имеем систему двух интегральных уравнений

$$u_1(x) - 2 \int_l \left[P_1^{(1)}(x, y) u_1(y) + P_2^{(1)}(x, y) u_2(y) \right] dl_y = 2u_1^0(x), \quad (9.39)$$

$$u_2(x) - 2 \int_l \left[P_1^{(2)}(x, y) u_1(y) + P_2^{(2)}(x, y) u_2(y) \right] dl_y = 2u_2^0(x),$$

$$x \in l, \quad \mathbf{u}^0(x) = \mathbf{q} e^{ik_p(q \cdot x)},$$

$$\mathbf{P}^{(k)}(x, y) = 2\mu \frac{\partial}{\partial n_y} [\mathbf{U}^{(k)}(x, y)] + \lambda \mathbf{n}_y \operatorname{div}_y [\mathbf{U}^{(k)}(x, y)] + \\ + \mu \{ \mathbf{n}_y \times \operatorname{rot}_y [\mathbf{U}^{(k)}(x, y)] \},$$

$$U_j^{(k)}(x, y) = \frac{i}{4\mu k_s^2} \left\{ k_s^2 \delta_{kj} H_0^{(1)}(k_s r) - \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left[H_0^{(1)}(k_p r) - H_0^{(1)}(k_s r) \right] \right\}, \\ r = |x - y|, \quad k, j = 1, 2,$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, k_p и k_s — продольное и поперечное волновые числа соответственно, λ и μ — модули упругости. Здесь для определенности рассмотрено падение продольной волны.

Построим выпуклую оболочку границы (см., например, [109], а также раздел 8.9), которая является минимальным выпуклым контуром, содержащим данный контур l . Это означает проведение касательных линий к контуру l , которые отделяют друг от друга выпуклые l_1 и невыпуклые l_2 части границы. Далее если провести касательные линии параллельно вектору \mathbf{q} , то отделяется теневая зона границы AB , которая располагается на ее задней стороне. Ясно, что точки A и B принадлежат выпуклым частям контура l_1 .

Пусть L — характерный размер препятствия. Если в асимптотическом смысле $kL \gg 1$, $k_p L \gg 1$, $k_s L \gg 1$, то решение интегральных уравнений в зоне тени тривиально — нуль. Следовательно, ГИУ (9.38) и (9.39) асимптотически сводятся к дуге $ACDB$. При этом мы подразумеваем под l_1 и l_2 только те части контура, которые лежат на передней части $ACDB$ граничного контура.

Поведение решения основных интегральных уравнений на выпуклых частях l_1 качественно отличается от их поведения на невыпуклых частях l_2 . В самом деле, на l_1 (дуги BD и AC на рис. 9.1) не существует переотражений акустических лучей. Наоборот, переотраженные лучи играют основную роль на l_2 . Следовательно, на высоких частотах решение уравнений (9.38) и (9.39) на выпуклых частях BD и AC асимптотически определяются так же, как и в случае строго выпуклого препятствия. Для уравнения (9.38) скалярной задачи это означает, что главный асимптотический член имеет вид

$$g(y) = 2 \frac{\partial p_0}{\partial n_y} = 2ik(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_y) e^{ik(q \cdot y)}, \quad y \in l_1. \quad (9.40)$$

В случае упругой среды в окрестности каждой точки на выпуклых частях l_1 решение системы (9.39) совпадает с известным решением задачи об отражении плоской волны от свободной границы соответствующей упругой полуплоскости.

Свяжем с каждой точкой $y \in l_1$ базис единичных векторов $\boldsymbol{\tau}_y$, \mathbf{n}_y , который образует правую прямоугольную систему координат, где \mathbf{n}_y — внешняя нормаль. Пусть \mathbf{t}_y будет единичным вектором, который определяет направление поперечной волны, отраженной от границы l_1 в точке y . Тогда, следуя [10],

$$\begin{aligned} u_\tau(y) &= \left[-(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}_y)(1 + V_{pp}) + \frac{k_s}{k_p}(\mathbf{t}_y \cdot \mathbf{n}_y)V_{ps} \right] e^{ik_p(q \cdot y)}, \\ u_n(y) &= \left[-(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_y)(1 - V_{pp}) - \frac{k_s}{k_p}(\mathbf{t}_y \cdot \boldsymbol{\tau}_y)V_{ps} \right] e^{ik_p(q \cdot y)}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Здесь V_{pp} и V_{ps} — коэффициенты отражения от границы в точке $y \in l_1$ для продольной и поперечной волны соответственно.

В результате компоненты вектора смещения $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$ на выпуклых частях l_1 могут быть найдены без решения системы (9.39) в следующем виде:

$$u_1(y) = n_1 u_n(y) + n_2 u_\tau(y), \quad u_2(y) = n_2 u_n(y) - n_1 u_\tau(y), \quad (9.42)$$

где n_1 и n_2 — компоненты единичного вектора нормали $\mathbf{n}_y = (n_1, n_2)$ в декартовой системе координат.

Как следует из предыдущих рассуждений, теперь осталось определить лишь значение неизвестных функций в уравнениях (9.38), (9.39) на невыпуклых частях l_2 . Для этого оставим в левых частях соответствующих ГИУ только интегралы по $y \in l_2$. Для $y \in l_1$ значение неизвестных функций уже определены формулами (9.40)–(9.42) и соответствующие интегралы по данным контурам могут быть перенесены в правые части как некоторые уже известные функции. Следовательно, полагая $x \in l_2$, изучение ГИУ можно свести в рассматриваемом высокочастотном случае к некоторым интегральным уравнениям по l_2 . Подобная редукция значительно снижает требуемое число арифметических операций, имеющее порядок $O(M^3)$, где M — число узлов коллокации в квадратурной формуле. Выпишем, например, уравнение, к которому приходим в скалярном случае после такого понижения размерности:

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} \int_{l_2} H_0^{(1)}(k|x-y|)g(y) dl_y = \\ = e^{ik(q \cdot x)} + \frac{k}{2} \int_{l_1} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_y) e^{ik(q \cdot y)} H_0^{(1)}(k|x-y|) dl_y, \quad x \in l_2. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Дальнейшее упрощение можно провести схожим образом. Если на освещенной части граничного контура присутствует несколько дуг типа l_2 , то суть дифракционного процесса такова: акустические источники, как граничные значения соответствующих неизвестных функций, лежащие на некоторой подобной невыпуклой части, в асимптотическом смысле не влияют на значения волновых полей на других подобных невыпуклых частях. Другими словами, акустические лучи,

отраженные от одной невыпуклой части, не могут достичь других невыпуклых частей границы. Следовательно, если существует J дуг l_{2j} , $j = 1, \dots, J$, то достаточно решить уравнение (9.43) на каждом контуре l_{2j} по отдельности.

Наконец, можно добиться дополнительного упрощения, если пренебречь влиянием акустических источников, принадлежащих выпуклым частям l_1 , на невыпуклые l_2 . Такой подход представляется естественным, поскольку отраженные лучи, например от дуги AC , не могут попасть на дугу CD ни в скалярном, ни в упругом случае. Уравнение (9.43) в рамках подобного подхода можно упростить или свести к набору более простых независимых уравнений

$$\frac{i}{4} \int_{l_{2j}} H_0^{(1)}(k|x-y|) g(y) dl_y = e^{ik(q \cdot x)}, \quad x \in l_{2j} \quad (j = 1, \dots, J). \quad (9.44)$$

Для демонстрации эффективности такого подхода рассмотрим вычисление диаграммы обратного рассеяния, которая весьма интересна для многих приложений. Если неизвестные функции определяются из уравнений (9.38), (9.39), то диаграмма обратного рассеяния определяется из следующего интегрального представления:

$$A(\alpha) = -\frac{i}{4} \int_l e^{ik(q \cdot y)} g(y) dl_y, \quad \mathbf{q} = \{-\cos \alpha, -\sin \alpha\}, \quad (9.45)$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{4} \left(\frac{k_p}{k_s} \right)^4 \int_l e^{ik_p(q \cdot y)} \left\{ \mathbf{u}_y \cdot \left[2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_y) \mathbf{q} + \frac{\lambda}{\mu} \mathbf{n}_y \right] \right\} dl_y. \quad (9.46)$$

Ниже мы применим предложенный метод для препятствий как выпуклой, так и невыпуклой формы. На всех рисунках сплошные кривые относятся к точному численному решению полного интегрального уравнения, а штриховые соответствуют вычислениям в рамках нашего приближенного подхода. На рис. 9.2 показана диаграмма обратного рассеяния $A(\alpha)$ (9.46) для двумерной задачи дифракции на эллиптической полости в упругой среде. Мы использовали значения $k_p a = 10$, $a/b = 3$, $k_s/k_p = c_p/c_s = 5,85/3,23$. Для этого выпуклого препятствия необходимое время вычислений для построения кривых точного и приближенного решений отличается в 120 раз.

Рисунок 9.3 демонстрирует диаграмму обратного рассеяния для препятствия в форме подковы, которое представляется в декартовой системе координат следующими параметрическими уравнениями:

$$kx(t) = \sum_{m=0}^4 a_m \cos(mt), \quad ky(t) = \sum_{m=1}^4 b_m \sin(mt), \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad (9.47)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 = 2,76, \quad a_1 = 3,38, \quad a_2 = 6,15, \quad a_3 = -1,12, \quad a_4 = -0,36, \\ b_1 = 8,48, \quad b_2 = 2,35, \quad b_3 = 1,30, \quad b_4 = -1,74. \end{aligned}$$

Рис. 9.2. Сравнение точного (сплошная кривая) и приближенного (штриховая) методов вычисления дифрагированных волн на эллиптическом препятствии

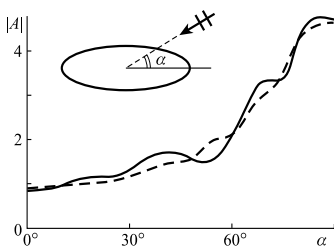
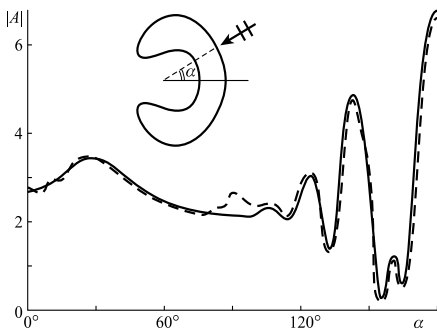


Рис. 9.3. Сравнение точного (сплошная кривая) и приближенного (штриховая) методов вычисления дифрагированных волн на препятствии в форме подковы



Требуемое время вычисления приближенной зависимости в 8 раз меньше, чем точной.

На рис. 9.4 представлена диаграмма обратного рассеяния для препятствия в форме трехлепестковой розы, рассматриваемой как полость в упругой среде. Уравнение, описывающее граничный контур в полярной системе координат, здесь $k_p \rho(\varphi) = 5(2 + \cos 3\varphi)$. Физические параметры имеют те же значения, что и в случае, показанном на рис. 9.2. Время вычисления точной и приближенной зависимостей отличается в 5 раз.

Ввиду очевидной симметрии всех рассмотренных препятствий все результаты показаны только для определенной части изменения угла $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$.

Для того чтобы более полно оценить точность представленных результатов, заметим, что характерный размер рассмотренных препятствий — примерно $3\lambda - 4\lambda$, где λ — длина волны (в упругом случае мы положили $\lambda = \lambda_p$, где λ_p — длина продольной волны).

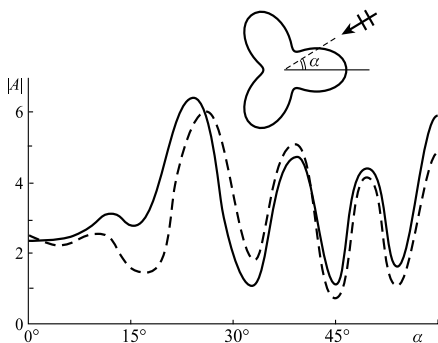


Рис. 9.4. Сравнение точного (сплошная кривая) и приближенного (штриховая) методов вычисления дифрагированных волн на препятствии в форме трехлепестковой розы

Примечание. Отметим, что некоторые альтернативные подходы адаптации метода граничных интегральных уравнений для более высоких частот изложены в работах [125, 128, 129].

9.4. Численные методы для интегральных уравнений с ядром Коши

В этом разделе мы в основном будем следовать классическим результатам [67]. Начнем изложение методов, подходящих для численного анализа сингулярных интегралов и интегральных уравнений, с квадратурной формулы для сингулярных интегралов типа Коши.

Разобьем интервал (a, b) на $n + 1$ одинаковых подынтервалов длины $h = (b - a)/(n + 1)$ (так называемое *каноническое разбиение*). Получим два набора узлов $\{t_j\}$ с $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} = b, t_j = a + jh, j = 0, 1, \dots, n+1$, и $\{x_i\}$ — центральные точки каждого подынтервала $(t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n$, так что $x_i = a + (i + 1/2)h, i = 0, \dots, n$.

Доказывается, что если $g(x) \in C_1(a, b)$, то

$$\int_a^b \frac{g(t) dt}{x_i - t} = h \sum_{j=1}^n \frac{g(t_j)}{x_i - t_j} + O \left[\frac{\ln n}{n(x_i - a)(b - x_i)} \right], \quad n \rightarrow \infty \sim h \rightarrow 0. \quad (9.48)$$

Теперь изучим сингулярное интегральное уравнение с характеристическим ядром

$$\int_a^b \frac{g(t) dt}{x - t} = f(x), \quad x \in (a, b), \quad f(x) \in C_1(a, b), \quad (9.49)$$

а также вспомним некоторые классические результаты, относящиеся к данному уравнению [18, 37]. Для уравнения (9.49) существует три класса решений. К первому относится решение, неограниченное на обоих концах интервала (a, b) . Подобное решение не единственно и, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяется с точностью до произвольной константы C . Вторым класс — решение, ограниченное на одном из двух концов отрезка интегрирования. Такое решение единственно. Третий класс — решения, получаемые при некоторых дополнительных условиях, наложенных на правую часть (т.е. не для каждой функции $f(x)$); здесь может существовать решение, ограниченное на обоих концах интервала. Нам интересен здесь только первый случай, когда точное аналитическое решение уравнения (9.49) определяется в явном виде как

$$g(t) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(t-a)(b-t)}} \left[\pi C - \int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{t-x} f(x) dx \right]. \quad (9.50)$$

Заметим, что произвольная постоянная C связана с интегралом от неизвестной функции $g(x)$:

$$C = \int_a^b g(x) dx. \quad (9.51)$$

Дальнейшая стратегия состоит в построении прямого численного метода коллокации для решения характеристического уравнения (9.49) для произвольной правой части, такого, чтобы построенное решение было корректным приближением точного аналитического решения (9.50). Тогда результаты, полученные с помощью метода для характеристического случая, можно распространить на полное сингулярное интегральное уравнение, аналитическое решение которого неизвестно.

С этой целью применим аппроксимацию (9.48) для сингулярного интеграла

$$\int_a^b \frac{g(t) dt}{x_i - t} \approx h \sum_{j=1}^n \frac{g(t_j)}{x_i - t_j}, \quad (9.52)$$

в результате приходим к некоторой линейной алгебраической системе. Докажем, что решение системы

$$\begin{cases} h \sum_{j=1}^n \frac{g(t_j)}{x_i - t_j} = f(x_i), & i = 1, \dots, n-1, \\ h \sum_{j=1}^n g(t_j) = C, \end{cases} \quad (9.53)$$

которая является линейной алгебраической системой размера $n \times n$ относительно неизвестных значений $g(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, определяет корректную аппроксимацию точного решения (9.50) уравнения (9.49) в том смысле, что если зафиксировать $t = t_l \in (a, b)$, то разница между решением $g(t_l)$ системы (9.53) и аналитическим решением (9.50) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Главный определитель системы (9.53) имеет вид

$$D = h^n \Delta, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - t_1} & \cdots & \frac{1}{x_1 - t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - t_1} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - t_n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.54)$$

В книге [67] доказывается, что

$$\Delta = \frac{\prod_{q < p} (t_q - t_p) \prod_{q < p} (x_p - x_q)}{\prod_{q, p} (x_q - t_p)}, \quad (9.55)$$

где нижний предел во всех произведениях равен 1, а верхний n .

Следуя правилу Крамера, необходимо вычислить определитель Δ_l , в котором столбец с правой частью подставляется вместо l -го столбца Δ :

$$D_l = h^{n-1} \Delta_l, \quad \Delta_l = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - t_1} & \cdots & cf(x_1) & \cdots & \frac{1}{x_1 - t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - t_1} & \cdots & f(x_{n-1}) & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - t_n} \\ 1 & \cdots & C & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.56)$$

Последний детерминант может быть вычислен с помощью разложения по элементам l -го столбца:

$$\begin{aligned} \Delta_l = & \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) (-1)^{j+l} \frac{\prod_{1 \leq q < p \leq n, q, p \neq l} (t_q - t_p) \prod_{1 \leq q < p \leq n-1, q, p \neq j} (x_p - x_q)}{\prod_{\substack{q \neq j \\ 1 \leq q \leq n-1}} \prod_{1 \leq p \leq n} (x_q - t_p)} + \\ & + C (-1)^{n+l} \frac{\prod_{1 \leq q < p \leq n, q, p \neq l} (t_q - t_p) \prod_{1 \leq q \leq n-1} \prod_{1 \leq p \leq n-1} (x_p - x_q)}{\prod_{1 \leq q \leq n-1} \prod_{1 \leq p \leq n} (x_q - t_p)}, \quad (9.57) \end{aligned}$$

Поэтому

$$g(t_l) = \frac{D_l}{D} = \frac{\prod_{1 \leq q \leq n-1} (x_q - t_l)}{h \prod_{\substack{q \neq l \\ 1 \leq q \leq n}} (t_q - t_l)} \left[C - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{t_l - x_j} \frac{\prod_{1 \leq q \leq n} (x_j - t_q)}{\prod_{\substack{q \neq j \\ 1 \leq q \leq n-1}} (x_j - x_q)} \right]. \quad (9.58)$$

Упростим произведения в последней формуле. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{1 \leq q \leq n-1} (x_q - t_l)}{\prod_{\substack{q \neq l \\ 1 \leq q \leq n}} (t_q - t_l)} &= (x_l - t_l) \frac{\prod_{q=1}^{l-1} (x_q - t_l)}{\prod_{q=1}^{l-1} (t_q - t_l)} \cdot \frac{\prod_{q=l+1}^{n-1} (x_q - t_l)}{\prod_{q=l+1}^n (t_q - t_l)} = \\ &= \frac{h}{2} \frac{\prod_{q=1}^{l-1} (q - 1/2)h}{\prod_{q=1}^{l-1} qh} \cdot \frac{\prod_{q=1}^{n-l-1} (q + 1/2)h}{\prod_{q=1}^{n-l} qh} = \\ &= \frac{h/2}{(n-l+1/2)h} \cdot \prod_{q=1}^{l-1} \left(1 - \frac{1}{2q}\right) \times \prod_{q=1}^{n-l} \left(1 + \frac{1}{2q}\right) \sim \\ &\sim \frac{h/2}{(n-l+1/2)h} \times \frac{l^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} \cdot \frac{(n-l)^{1/2}}{\Gamma(3/2)} \sim \frac{h}{b-t_l} \frac{\sqrt{b-t_l}}{\pi\sqrt{t_l-a}} = \\ &= \frac{h}{\pi\sqrt{(b-t_l)(t_l-a)}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (9.59) \end{aligned}$$

где была использована асимптотическая оценка (ср. с [67])

$$\prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{\beta}{m}\right) = \frac{n^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + O(n^{\beta-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (9.60)$$

По аналогии при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\prod_{1 \leq q \leq n} (x_j - t_q)}{\prod_{q \neq j} (x_j - x_q)} = (x_j - t_j) \frac{\prod_{q=1}^{j-1} (x_j - t_q)}{\prod_{q=1}^{j-1} (x_j - x_q)} \cdot \frac{\prod_{q=j+1}^n (x_j - t_q)}{\prod_{q=j+1}^{n-1} (x_j - x_q)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{2} \frac{\prod_{q=1}^{j-1} (q + 1/2)h}{\prod_{q=1}^{j-1} qh} \cdot \frac{\prod_{q=1}^{n-j} (q - 1/2)h}{\prod_{q=1}^{n-j-1} qh} = \\
&= \frac{h}{2} (n - j - 1/2) \prod_{q=1}^{j-1} \left(1 + \frac{1}{2q}\right) \prod_{q=1}^{n-j-1} \left(1 - \frac{1}{2q}\right) \sim \\
&\sim \frac{h}{2} \frac{(b - x_j) \sqrt{x_j - a}}{\Gamma(1/2) \Gamma(3/2) \sqrt{b - x_j}} = \frac{h}{\pi} \sqrt{(x_j - a)(b - x_j)}. \quad (9.61)
\end{aligned}$$

Отсюда выражение (9.58) при $h \rightarrow 0$ стремится к следующему:

$$\begin{aligned}
g(t_l) &\sim \frac{1}{\pi \sqrt{(b - t_l)(t_l - a)}} \left[C - \frac{h}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j) \sqrt{(x_j - a)(b - x_j)}}{t_l - x_j} \right] \sim \\
&\sim \frac{1}{\pi \sqrt{(b - t_l)(t_l - a)}} \left[C - \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(x) \sqrt{(x - a)(b - x)}}{t_l - x} dx, \right] \quad (9.62)
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Заметим, что при последнем переходе использована квадратурная формула (9.48).

Теперь рассмотрим полное уравнение

$$\int_a^b \left[\frac{1}{x - t} + K_0(x, t) \right] g(t) dt = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (9.63)$$

Его общее решение может быть построено с помощью обращения характеристической части (см. (9.50)), что сводит уравнение (9.63) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $g_1(x) = \sqrt{(x - a)(b - x)} g(x)$:

$$g_1(x) + \int_a^b N_1(x, t) g_1(t) dt = f_1(x), \quad x \in (a, b). \quad (9.64)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
N_1(x, t) &= -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{(t - a)(b - t)}} \int_a^b \frac{K_0(\tau, t) \sqrt{(\tau - a)(b - \tau)}}{x - \tau} d\tau, \\
f_1(x) &= \frac{C}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} \int_a^b \frac{f(\tau) \sqrt{(\tau - a)(b - \tau)}}{x - \tau} d\tau,
\end{aligned} \quad (9.65)$$

где C — снова произвольная константа. Следует заметить, что ядро данного уравнения Фредгольма обладает слабой сингулярностью.

Докажем, что прямое численное решение уравнения (9.63) может быть построено из линейной алгебраической системы

$$\begin{cases} h \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{x_i - t_j} + K_0(x_i, t_j) \right] g(t_j) = f(x_i), & i = 1, \dots, n-1, \\ h \sum_{j=1}^n g(t_j) = C \end{cases} \quad (9.66)$$

в том смысле, что его решение стремится к решению уравнения (9.63) в любой фиксированной точке, когда $h \rightarrow 0$ (то есть $n \rightarrow \infty$). В самом деле, если перенести слагаемые, относящиеся к регулярному ядру, в правую часть и решить выписанную таким образом линейную алгебраическую систему с характеристической матрицей $1/(x_i - t_j)$, придем к конечно-разностной аппроксимации уравнения (9.64). Доказательство окончательно завершается, если применить классические результаты численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Примечание. Аппроксимация (9.48) показывает, что обычные квадратурные формулы, хорошо известные для регулярных интегралов, могут быть также применены к сингулярным интегралам типа Коши с выбранными каноническими наборами узлов.

9.5. Численные методы для гиперсингулярных уравнений

Рассмотрим гиперсингулярное уравнение с характеристическим ядром

$$\int_a^b \frac{g(t) dt}{(x-t)^2} = f'(x), \quad x \in (a, b), \quad f(x) \in C_2(a, b). \quad (9.67)$$

Докажем, что ограниченное решение уравнения (9.67) единственно и имеет вид

$$g(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi^2} \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)} (x-t)}. \quad (9.68)$$

В самом деле, согласно определению гиперсингулярных интегралов (см. раздел 1.8), уравнение (9.67) эквивалентно

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \frac{g(t) dt}{(x-t)} = -f'(x) \sim \int_a^b \frac{g(t) dt}{x-t} = -f(x) + C, \quad x \in (a, b), \quad (9.69)$$

где C — произвольная константа. Теперь формула обращения для характеристического оператора Коши [18] определяет ограниченное решение в виде

$$g(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi^2} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(x-t)} dt, \quad x \in (a, b), \quad (9.70)$$

и константу C в виде

$$C = \frac{1}{\pi^2} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt. \quad (9.71)$$

Таким образом, любое ограниченное решение уравнения (9.67) исчезает при $x \rightarrow a, b$.

Для построения прямого коллокационного метода решения уравнения (9.67) с произвольной правой частью введем каноническое разбиение, не вполне схожее с разбиением в случае сингулярных интегралов (см. предыдущий раздел). А именно разделим интервал (a, b) на n малых одинаковых подынтервалов длины $h = (b-a)/n$, узлами $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b, t_j = a + jh, j = 0, 1, \dots, n$. Центральные точки каждого подынтервала (t_{i-1}, t_i) обозначим через x_i ; таким образом, $x_i = a + (i-1/2)h, i = 1, \dots, n$.

Если попытаться приблизить интеграл (9.67) конечной суммой, как в регулярных случаях, то для $x = x_i$ получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{g(t)dt}{(x_i - t)^2} &\approx \sum_{j=0}^n g(t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{dt}{(x_i - t)^2} = \\ &= g(t_i) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dt}{t^2} + \sum_{j \neq i} g(t_j) \left(\frac{1}{x_i - t_j} - \frac{1}{x_i - t_{j-1}} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n g(t_j) \left(\frac{1}{x_i - t_j} - \frac{1}{x_i - t_{j-1}} \right), \end{aligned} \quad (9.72)$$

где использовано значение гипersингулярного интеграла от функции $1/t^2$. Таким образом, попробуем аппроксимировать уравнение (9.67) линейной алгебраической системой

$$\sum_{j=1}^n g(t_j) \left(\frac{1}{x_i - t_j} - \frac{1}{x_i - t_{j-1}} \right) = f'(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.73)$$

Дальнейший анализ подобен представленному в книге [67]. Докажем, что для фиксированного $x = x_l \in (a, b)$, разность между решени-

ем $g(x_l)$ системы (9.73) и аналитическим решением (9.70) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Система (9.73) может быть переписана как

$$\sum_{j=1}^n g(t_j) \left(\frac{1}{x_j - t_i} - \frac{1}{x_j - t_{i-1}} \right) = f'(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.74)$$

и ее главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{x_1 - t_1} - \frac{1}{x_1 - t_0} \right) & \dots & \left(\frac{1}{x_n - t_1} - \frac{1}{x_n - t_0} \right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{1}{x_1 - t_n} - \frac{1}{x_1 - t_{n-1}} \right) & \dots & \left(\frac{1}{x_n - t_n} - \frac{1}{x_n - t_{n-1}} \right) \end{vmatrix}. \quad (9.75)$$

Перепишем i -ю строку Δ ($i = 2, \dots, n$) в виде суммы всех остальных строк от $k = 1$ до $k = i$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \frac{t_1 - t_0}{(x_1 - t_1)(x_1 - t_0)} & \dots & \frac{t_1 - t_0}{(x_n - t_1)(x_n - t_0)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{t_n - t_0}{(x_1 - t_n)(x_1 - t_0)} & \dots & \frac{t_n - t_0}{(x_n - t_n)(x_n - t_0)} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n (t_j - t_0)}{\prod_{i=1}^n (x_i - t_0)} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - t_1} & \dots & \frac{1}{x_n - t_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_1 - t_n} & \dots & \frac{1}{x_n - t_n} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\prod_j (t_j - t_0)}{\prod_i (x_i - t_0)} \frac{\prod_{q < p} \prod_{q < p} (t_q - t_p) \prod_{q < p} (x_p - x_q)}{\prod_{q, p} (x_q - t_p)}, \quad (9.76) \end{aligned}$$

где нижний предел во всех произведениях равен 1, а верхний n . Известное значение последнего определителя было взято из книги [67].

Следуя правилу Крамера, необходимо вычислить определитель Δ_l , у которого столбец с правой частью (9.74) подставляется вместо l -го столбца Δ (9.75):

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{x_1 - t_1} - \frac{1}{x_1 - t_0} \right) & \dots & f'(x_1) & \dots & \left(\frac{1}{x_n - t_1} - \frac{1}{x_n - t_0} \right) \\ \left(\frac{1}{x_1 - t_2} - \frac{1}{x_1 - t_1} \right) & \dots & f'(x_2) & \dots & \left(\frac{1}{x_n - t_2} - \frac{1}{x_n - t_1} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{1}{x_1 - t_n} - \frac{1}{x_1 - t_{n-1}} \right) & \dots & f'(x_n) & \dots & \left(\frac{1}{x_n - t_n} - \frac{1}{x_n - t_{n-1}} \right) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{t_1 - t_0}{(x_1 - t_1)(x_1 - t_0)} & \cdots & f'(x_1) & \cdots & \frac{t_1 - t_0}{(x_n - t_1)(x_n - t_0)} \\ \frac{t_2 - t_0}{(x_1 - t_2)(x_1 - t_0)} & \cdots & f'(x_1) + f'(x_2) & \cdots & \frac{t_2 - t_0}{(x_n - t_2)(x_n - t_0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{t_n - t_0}{(x_1 - t_n)(x_1 - t_0)} & \cdots & \sum_{k=1}^n f'(x_k) & \cdots & \frac{t_n - t_0}{(x_n - t_n)(x_n - t_0)} \end{vmatrix}, \quad (9.77)$$

где мы воспользовались таким же суммированием строк, что и в случае с Δ .

Последний определитель может быть вычислен разложением по элементам l -й колонки следующим образом:

$$\Delta_l = \frac{\prod_j (t_j - t_0)}{\prod_{i \neq l} (x_i - t_0)} \sum_{m=1}^n \frac{\sum_{k=1}^m f'(x_k)}{t_m - t_0} (-1)^{m+l} \times \\ \times \frac{\prod_{q < p, q, p \neq m} (t_q - t_p) \prod_{q < p, q, p \neq l} (x_p - x_q)}{\prod_{q \neq l, p \neq m} (x_q - t_p)}, \quad (9.78)$$

ПОЭТОМУ

$$g(x_l) = \frac{\Delta_l}{\Delta} = \\ = (x_l - t_0) \sum_{m=1}^n \frac{\sum_{k=1}^m f'(x_k) \prod_p (x_l - t_p) \prod_q (x_q - t_m)}{(t_m - t_0)(x_l - t_m) \prod_{p \neq m} (t_m - t_p) \prod_{q \neq l} (x_q - x_l)}. \quad (9.79)$$

Выражение (9.79) при $h \rightarrow 0 \sim n \rightarrow \infty$, при условии, что $x_l \in (a, b)$ фиксированно, может быть оценено следующим образом:

$$\frac{\prod_{p=1}^n (x_l - t_p)}{\prod_{q \neq l} (x_q - x_l)} = (x_l - t_l) \frac{\prod_{p=1}^{l-1} (x_l - t_p)}{\prod_{q=1}^{l-1} (x_q - x_l)} \cdot \frac{\prod_{p=l+1}^n (x_l - t_p)}{\prod_{q=l+1}^n (x_q - x_l)} = \\ = \frac{(-1)^n h}{2} \prod_{p=1}^{l-1} \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \cdot \prod_{p=1}^{n-l} \left(1 + \frac{1}{2p}\right) \sim (-1)^n \frac{h \sqrt{b - x_l}}{\pi \sqrt{x_l - a}}, \quad (9.80)$$

если x принадлежит открытому интервалу (a, b) (то есть $l \neq n$, $l \neq 1$). Здесь мы воспользовались асимптотической оценкой (ср. с [67])

$$\prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{\beta}{m}\right) = \frac{n^\beta}{\Gamma(1 + \beta)} + O(n^{\beta-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (9.81)$$

Далее по аналогии

$$\frac{\prod_{q \neq m} (x_q - t_m)}{\prod_{p \neq m} (t_m - t_p)} = (-1)^n (t_m - x_m) \prod_{q=1}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{2q}\right) \prod_{q=1}^{n-m} \left(1 - \frac{1}{2q}\right) \sim$$

$$\sim (-1)^n \frac{h \sqrt{t_m - a}}{\pi \sqrt{b - t_m}}. \quad (9.82)$$

Остальные слагаемые в выражении (9.79) можно упростить следующим образом ($h \rightarrow 0$):

$$(x_l - t_0) \rightarrow (x_l - a), \quad (t_m - t_0) \rightarrow (t_m - a),$$

$$h \sum_{k=1}^m f'(t_k) \rightarrow \int_a^{t_m} f'(t) dt = f(t_m), \quad (9.83)$$

поэтому выражение (9.79) при $h \rightarrow 0$ стремится к следующему:

$$g(x_l) \sim \frac{h}{\pi^2} \sqrt{(x_l - a)(b - x_l)} \sum_{m=1}^n \frac{f(t_m)}{\sqrt{(t_m - a)(b - t_m)} (x_l - t_m)} \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{(x_l - a)(b - x_l)}}{\pi^2} \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t - a)(b - t)} (x_l - t)}. \quad (9.84)$$

Рассмотрим полное уравнение

$$\int_a^b \left[\frac{1}{(x - t)^2} + K_0(x, t) \right] g(t) dt = f'(x), \quad x \in (a, b), \quad (9.85)$$

где

$$K_0(x, t) = \frac{\partial K_1(x, t)}{\partial x}. \quad (9.86)$$

Его ограниченное решение может быть построено обращением характеристической части, что сводит уравнение (9.85) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$g(x) + \int_a^b N_1(x, t) g(t) dt = f_1(x), \quad x \in (a, b), \quad (9.87)$$

где

$$N_1(x, t) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi^2} \int_a^b \frac{K_1(\tau, t) d\tau}{\sqrt{(\tau-a)(b-\tau)} (x-\tau)}, \quad (9.88)$$

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi^2} \int_a^b \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{(\tau-a)(b-\tau)} (x-\tau)}. \quad (9.89)$$

Докажем, что если $f(x) \in C_2(a, b)$, $K_1(x, t) \in C_2[(a, b) \times (a, b)]$, то для любого $x \in (a, b)$ разность между решением $g(x)$ линейной алгебраической системы

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{x_i - t_j} - \frac{1}{x_i - t_{j-1}} + hK_0(x_i, t_j) \right] g(t_j) = f'(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.90)$$

и ограниченным решением уравнения (9.85), (9.86) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ (то есть $n \rightarrow \infty$). Действительно, если перенести слагаемые, относящиеся к регулярному ядру, в правую часть и решить полученную таким образом линейную алгебраическую систему с характеристической матрицей $1/(x_i - t_j) - 1/(x_i - t_{j-1})$, то придем к конечно-разностной аппроксимации уравнения (9.87). Доказательство окончательно завершается, если применить классические результаты численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Пример расчетов для $K_0(x, t) = A(x - t)$, $f'(x) = -\pi \sim f(x) = -\pi x$ можно найти в работе [92], где численное решение сравнивается с точным $g(x) = 8\sqrt{1-x^2}(4+Ax)/(32+A^2)$ в случае $A = 3$, $(a, b) = (-1, 1)$.

Примечание. В выражении (9.84) при последнем переходе была неявно применена квадратурная формула (9.48) из предыдущего раздела для случая, когда подынтегральное выражение содержит корневую особенность на концах интервала. Можно доказать, что оценка (9.48) может быть улучшена в данном случае следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{g(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)} (x_i - t)} &= h \sum_{j=1}^n \frac{g(t_j)}{\sqrt{(t_j - a)(b - t_j)} (x_i - t_j)} + \\ &+ O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}(x_i - a)(b - x_i)}\right), \quad n \rightarrow \infty \sim h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9.91)$$

Список литературы

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
2. *Александров В.М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // Прикл. матем. и мех.. 1968. **32**, вып. 1. С. 672.
3. *Бабешко В.А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике // Прикл. матем. и мех. 1971. **35**, вып. 1. С. 88.
4. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
5. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1977. **14**. С. 5.
6. *Боев Н.В., Ватульян А.О., Сумбатьян М.А.* Восстановление контура препятствий по характеристикам рассеянного акустического поля в коротковолновой области // Акуст. журнал. 1997. **43**, вып. 4. С. 391.
7. *Боев Н.В., Сумбатьян М.А.* Обратная задача коротковолновой дифракции для невыпуклых осесимметричных препятствий // Акуст. журнал. 1999. **45**, вып. 2, С. 164.
8. *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* Геометрическая теория дифракции. — М.: Связь, 1978.
9. *Брацун Г.А., Сумбатьян М.А.* Исследование вопроса практической устойчивости метода вспомогательных источников // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1993. **33**, №1. С. 142.
10. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. 2-е изд. — М.: Наука, 1973.
11. *Буров В.А.* и др. Обратные задачи рассеяния в акустике: Обзор // Акуст. журнал. 1986. **32**, вып. 4. С. 433.
12. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966.
13. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. — М.: Физматлит, 2007.
14. *Ватульян А.О., Беляк О.А.* К реконструкции малых полостей в упругом слое. — Дефектоскопия. 2006. №10. С. 33.
15. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979.
16. *Ворович И.И., Сумбатьян М.А.* Восстановление образа дефекта по рассеянному волновому полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. **6**, С. 79.
17. *Воронин В.В., Цецохо В.А.* Численное решение интегрального уравнения I рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. **21**, вып. 1. С. 40.

18. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
19. *Гельфанд И.М., Шилев Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 1. — М.: Физматгиз, 1958.
20. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. — М.: Физматгиз, 1963.
21. *Дружинина И.Д., Сумбатьян М.А.* Численно-аналитический метод в задачах коротковолновой дифракции // Акуст. журнал. 1990. **36**, вып. 2. С. 269.
22. *Дружинина И.Д., Сумбатьян М.А.* Коротковолновая дифракция на телах с произвольной гладкой границей в двумерном случае // Акуст. журнал. 1992. **38**, вып. 3. С. 470.
23. *Жиглявский А.А.* Математическая теория глобального случайного поиска. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
24. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
25. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.: ГИФМЛ, 1962.
26. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987.
27. *Кузнецов Н.В.* Асимптотическое распределение собственных частот плоской мембраны в случае разделяющихся переменных // Дифф. уравнения. 1966. **2**. С. 715.
28. *Кузнецов Н.В., Федосов Б.В.* Асимптотическая формула для собственных значений круговой мембраны // Дифф. уравнения. 1965. **1**. С. 1682.
29. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. — Л.: ГИТТЛ, 1950.
30. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. — М.; Л.: ГТТИ, 1945.
31. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968.
32. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. **127**, вып. 1. С. 31.
33. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций — М.: Наука, 1967.
34. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Физматгиз, 1970.
35. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. — М.: Гостехиздат, 1952.
36. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1987.
37. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
38. *Погорелов А.И.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
39. *Погорелов А.В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969.
40. *Погорелов А.В.* Многомерная проблема Минковского. — М.: Наука, 1975.

41. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. — М.: Факториал Пресс, 2000.
42. Риекстиньш Е.Ж. Асимптотические разложения интегралов. Т. 2. — Рига: Зинатне, 1977.
43. Риекстиньш Е.Ж. Асимптотические разложения интегралов. Т. 3. — Рига: Зинатне, 1981.
44. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
45. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
46. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1974.
47. Сумбатян М.А. Развитие метода Шоха для численного исследования поля ультразвукового излучателя // Акуст. журнал. 1988. **34**, вып. 1. С. 185.
48. Сумбатян М.А. Метод глобального случайного поиска в обратных задачах с приложением к проблеме распознавания образа дефекта // Прикл. матем. и мех. 1992. **56**, вып. 5. С. 779.
49. Сумбатян М.А. Явные решения задач акустики в многогранниках // Докл. РАН. 2000. **373**, №4. С. 462.
50. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1985.
51. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
52. Тихонов А.Н., Гончарский А.В. Некорректные задачи естествознания. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
53. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
54. Федорюк М.В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1962. **2**, вып. 1.
55. Федорюк М.В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
56. Фридман В.М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска // Усп. матем. наук. 1962. **17**, вып. 3 (105). С. 201.
57. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1972.
58. Эрдейи А. Асимптотические разложения. — М.: ГИФМЛ, 1962.
59. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. — Amsterdam: North-Holland, 1973.
60. Alexandrov A.D., Zalgaller U.A. Intrinsic Geometry of Surfaces. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1967.
61. Angell T.S. et al. A constructive method for identification of an impedance scatterer // Wave Motion. 1989. **11**. P. 185.
62. Angell T.S. et al. Target reconstruction from scattered far field data // Annal. Telecomm. 1989. **44**. P. 456.
63. Atkinson F.V. On Sommerfeld's "Radiation condition" // Philos. Mag. 1949. **40**. P. 645.

64. *Banerjee P.K., Butterfield R.* Boundary Element Methods in Engineering Science. — L.: McGraw-Hill, 1981.
65. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions, Vol. 1, 2. — N.Y.: McGraw-Hill, 1953.
66. *Bateman H., Erdelyi A.* Tables of Integral Transforms. Vol. 1. — N.Y.: McGraw-Hill, 1954.
67. *Belotserkovsky S.M., Liĭanov I.K.* Method of Discrete Vortices. — Boca Raton: CRC Press, 1993.
68. *Blaschke W.* Differential Geometrie und Geometrische Grundlagen Einsteins Relativitätstheorie. Vol. 1. — B.: Springer-Verlag, 1930.
69. *Boström A.* The null-field approach in series form: The direct and inverse problems // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. **79**. P. 1223.
70. *Bowman J.J., Senior T.B.A., Uslenghi P.L.E.* Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes. — N.Y.: Hemisphere Publ., 1987.
71. *Bremermann H.* Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1965.
72. *Carleman T.* Sur la resolution de certaines equations integrales // Arkiv. Mat. Astr. Phys. 1922. **16**. P. 1.
73. *Collin R.E.* Field Theory of Guided Waves. — N.Y.: McGraw-Hill, 1960.
74. *Colton D.* The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves // SIAM Review. 1984. **36**. P. 323.
75. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. — N.Y.: Springer-Verlag, 1992.
76. *Colton D., Monk P.* A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region // SIAM J. Appl. Math. 1985. **45**. P. 1039.
77. *Colton D., Monk P.* A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region II // SIAM J. Appl. Math. 1986. **46**. P. 506.
78. *Felsen L.B., Marcuvitz N.* Radiation and Scattering of Waves. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1973.
79. *Fletcher C.A.J.* Computational Galerkin Methods. — N.Y.: Springer-Verlag, 1984.
80. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer Methods for Mathematical Computations. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.
81. *Gill P.E., Murray W., Wright M.H.* Practical Optimization. — L.: Academic Press, 1981.
82. *Groetsch C.* The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. — L.: Pitman, 1984.
83. *Grosjean C.C.* On the series expansion of certain types of Fourier integrals in the neighbourhood of the origin // Bull. Soc. Math. Belge. 1965. **17**. P. 251.
84. *Hackbusch W.* Integral Equations. Theory and Numerical Treatment. — Basel: Birkhauser Verlag, 1995.
85. *Handelsman R.A., Lew J.S.* Asymptotic expansion of Laplace transforms near the origin // SIAM J. Math. Anal. 1970. **1**. P. 118.

86. *Hardy H.* Divergent Series. — L.: Oxford University Press, 1956.
87. *Hille E., Tamarkin J.D.* On the characteristic values of linear integral equations // *Acta Math.* 1931. **57**. P. 1.
88. *Hobson E.W.* The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. — N. Y.: Chelsea Publ., 1955.
89. *Hönl H., Maue A.W., Westpfahl K.* Theorie der Beugung. — B.: Springer-Verlag, 1961.
90. *Horn R.A., Johnson Ch.R.* Matrix Analysis. — L.: Cambridge Univ. Press, 1986.
91. *Imbriale W.A., Mittra R.* The two-dimensional inverse scattering problem // *IEEE Trans. Antenn. Propag.* 1970. **AP-18**. P. 633.
92. *Iovane G., Liřanov I.K., Sumbatyan M.A.* On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // *Acta Mechanica*. 2003. **162**. P. 99.
93. *Jones D.S.* Diffraction by a wave-guide of finite length // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1952. **48**. P. 118.
94. *Jones D.S.* Integral equations for the exterior acoustic problems // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1974. **27**. P. 129.
95. *Jorgenson R.E., Mittra R.* Efficient calculation of the free-space periodic Green's function // *IEEE Trans. Antenn. Propag.* 1990. **38**. P. 633.
96. *Keller J.B.* The geometrical theory of diffraction // *J. Optical Soc. Amer.* 1962. **52**. P. 116.
97. *Kirsch A., Kress R.* Two methods for solving the inverse acoustic scattering problem // *Inverse Problems*. 1988. **4**, N 3. P. 749.
98. *Kleinman R.E., Roach G.F.* On modified Green's functions in exterior problems for the Helmholtz equation // *Proc. Roy. Soc. London*. 1982. **A 383**. P. 313.
99. *Koiter W.T.* Approximate solution of Wiener-Hopf type integral equations with application // *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet.* 1954. **57**. P. 558.
100. *Kristensson G., Vogel C.R.* Inverse problems for acoustic waves using the penalized likelihood method, — *Inverse Problems*. 1986. **2**. P. 461.
101. *Makai E.* Complete orthogonal systems of eigenfunctions of three triangular membranes // *Studia Scient. Mathem. Hungar.* 1970. **5**. P. 51.
102. *Mathis A.W., Peterson A.F.* A comparison of acceleration procedures for the two-dimensional periodic Green's function // *IEEE Trans. Antenn. Propag.* 1996. **44**. P. 567.
103. *McNamara D.A.M., Pistorius C.W.I., Malherbe J.A.G.* A comparison of acceleration procedures for the two-dimensional periodic Green's function: Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction. — Norwood: Artech House, 1990.
104. *Mindlin R.D.* An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. — Fort Monmouth, N.J.: US Army Signal Corp. Eng. Lab., 1955.
105. *Mittra R., Lee S.W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. — N. Y.: Macmillan, 1971.

106. *Morse P.M., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics. Pt. 1, 2. — N. Y.: McGraw-Hill, 1953.
107. *Noble B.* Methods Based on Wiener–Hopf Technique. — N. Y.: Pergamon Press, 1958.
108. *Pissanetski S.* Sparse Matrix Technology. — Moscow: Mir, 1988.
109. *Preparata F.P., Shamos M.I.* Computational Geometry: An Introduction. — N. Y.: Springer-Verlag, 1985.
110. *Ramm A.G.* Scattering by Obstacles. — Dordrecht, Reidel Publ. 1986.
111. *Rees C.S., Shah S.M., Stanojevic C.V.* Theory and Applications of Fourier Analysis. — N. Y.: Marcel Dekker, 1981.
112. *Roger A.* Newton-Kantorovich algorithm applied to an electromagnetic inverse problem // IEEE Trans. Antenn. Propag. 1981. **AP-29**. P. 232.
113. *Samko S.G.* Hyper-singular Integrals and Their Applications. — L.: Gordon & Breach, 2000.
114. *Scalia A., Sumbatyan M.A.* On high-frequency asymptotics in diffraction by finite-length waveguides: Open structures // J. Eng. Math. 1999. **35**. P. 427.
115. *Scalia A., Sumbatyan M.A.* Explicit short-wave asymptotics for diffraction by finite-length discontinuities in waveguides: Closed structures // ZAMP. 2001. **52**. P. 631.
116. *Scarpetta E., Sumbatyan M.A.* Explicit analytical representations in the multiple high-frequency reflection of acoustic waves from curved surfaces: the leading asymptotic term // Acta Acustica united with Acustica. 2011. **97**. P. 115.
117. *Scarpetta E., Sumbatyan M.A.* The contribution of the edge effects in the multiple high-frequency Kirchhoff diffraction by plane surfaces // Wave Motion. 2013. **50**. P. 210.
118. *Schoch A.* Betrachtungen über das Schallfeld einer Kolbenmembran // Akust. Z. 1941. **6**. S. 318.
119. *Sierpinski W.* Elementary Theory of Numbers. — Amsterdam: North-Holland, 1988.
120. *Skudrzyk E.* The Foundations of Acoustics. — Vienna; N. Y.: Springer-Verlag, 1971.
121. *Sumbatyan M.A., Pompei A.* Some explicit results for three-dimensional Helmholtz operator in polyhedra // Rep. Math. Phys. 2001. **47**. P. 371.
122. *Sumbatyan M.A., Pompei A., Rigano A.* New explicit solutions in acoustics of closed spaces on the basis of divergent series // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. **107**. P. 709.
123. *Sumbatyan M.A., Solokhin N.V., Trojan E.A.* Reconstruction of convex flaws using backscattered ultrasound // NDT & E Int. 1993. **26**. P. 227.
124. *Sumbatyan M.A., Remizov M.Yu., Zampoli V.* A semi-analytical approach in the high-frequency diffraction by cracks // Mech. Res. Commun. 2011. **38**. P. 607.
125. *Thiele G.A., Newhouse T.H.* A hybrid technique for combining moment methods with the geometrical theory of diffraction // IEEE Trans. Antenn. Propag. 1975. **AP-23**. P. 62.

126. *Titchmarsh E.C.* Introduction to the Theory of Fourier Integrals. 2nd Ed. — Oxford: Clarendon Press, 1948.
127. *Tobocman W.* Inverse acoustic wave scattering in two dimensions from impenetrable targets // Inverse Problems. 1989. **5**. P. 1131.
128. *Tobocman W.* Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. **80**. P. 1828.
129. *Tobocman W.* Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths. II // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. **82**. P. 704.
130. *Weyl H.* Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von der Begrenzung // J. Reine Angew. Math. 1912. **141**. S. 1.
131. *Weyl H.* Kapazität von Strahlungsfeldern // Math. Ziet. 1952. **55**. S. 187–198.
132. *Wiener N.* The Fourier Integral and Certain of its Applications. — N. Y.: Dover, 1934.
133. *Zemanian A.H.* Generalized Integral Transformations. — N. Y.: Interscience Publ., 1969.

Научное издание

СУМБАТЯН Междум Альбертович
СКАЛИЯ Антонио

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
В МЕХАНИКЕ И АКУСТИКЕ**

Редактор *П.Л. Поляков*
Оригинал-макет: *П.Л. Поляков*
Оформление переплета: *Н.Л. Лисицына*

Подписано в печать 30.12.2013. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20.5. Уч.-изд. л. 22.55. Тираж 250 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ГУП МО «Коломенская типография».
140400, г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2а.
ИНН 5022013940. Тел.: 8(496)618-69-33, 618-60-16.
E-mail: bab40@yandex.ru, www.kolomna-print.ru